

TOP DINÂMICO + ENEM

MATEMÁTICA
MÓDULO 4
PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Prof. Estefanio Franco Maciel - Matemática - Módulo 4

TOP DINÂMICO + ENEM

O que não te desafia não te transforma.

Prof. Estefanio Franco Maciel - Matemática - Módulo 4

TOP DINÂMICO + ENEM**PROGRESSÃO ARITMÉTICA**

- QUANDO SOMA-SE UM MESMO VALOR A CADA TERMO
- A RAZÃO É A DIFERENÇA ENTRE UM TERMO E O SEU ANTECESSOR
- TERMO CENTRAL A MÉDIA ARITMÉTICA DOS EXTREMOS
- RAZÃO POSITIVA, P.A. CRESCENTE, RAZÃO NEGATIVA, P.A. DECRESCENTE

Prof. Estefanio Franco Maciel - Matemática - Módulo 4

TOP DINÂMICO + ENEM

$$\begin{array}{cccccccc}
 & \overset{+4}{\curvearrowright} & & \overset{+4}{\curvearrowright} & & \overset{+4}{\curvearrowright} & & \overset{+4}{\curvearrowright} \\
 3 & 7 & 11 & 15 & 19 & 23 & 27 & 31 & 35
 \end{array}$$

RAZÃO = $7 - 3$ OU $15 - 11$ OU $23 - 19 \dots = 4$

$$7 = \frac{3+11}{2} \quad \text{OU} \quad 15 = \frac{3+27}{2}$$

Prof. Estefanio Franco Maciel - Matemática - Módulo 4

TOP DINÂMICO + ENEM**TERMO GERAL**

$$a_n = a_1 + (n-1).r$$

SOMA DE n TERMOS

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

Prof. Estefanio Franco Maciel - Matemática - Módulo 4

TOP DINÂMICO + ENEM**PROGRESSÃO GEOMÉTRICA**

- QUANDO MULTIPLICA-SE UM MESMO VALOR A CADA TERMO
- A RAZÃO É O QUOCIENTE ENTRE UM TERMO E O SEU ANTECESSOR
- TERMO CENTRAL A MÉDIA GEOMÉTRICA DOS EXTREMOS
- RAZÃO POSITIVA, P.G. COM TERMOS DE MESMO SINAL, RAZÃO NEGATIVA, P.G. COM TERMOS DE SINAIS ALTERNANTES

Prof. Estefanio Franco Maciel - Matemática - Módulo 4

TOP DINÂMICO + ENEM

2 8 32 128 512 2048

$\xrightarrow{\times 4}$ $\xrightarrow{\times 4}$ $\xrightarrow{\times 4}$ $\xrightarrow{\times 4}$ $\xrightarrow{\times 4}$

$$\text{razão} = \frac{8}{2} \text{ ou } \frac{512}{128} = 4$$

$$32 = \sqrt[4]{8 \cdot 128}$$

Prof. Estefano Franco Maciel - Matemática - Módulo 2

TOP DINÂMICO + ENEM

TERMO GERAL

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

SOMA DE n TERMOS

$$S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}$$

Prof. Estefano Franco Maciel - Matemática - Módulo 2

TOP DINÂMICO + ENEM

SOMA DE INFINITOS TERMOS

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$$

PRODUTO DE n TERMOS

$$p_n = a_1^n q^{\frac{n \cdot (n-1)}{2}}$$

Prof. Estefano Franco Maciel - Matemática - Módulo 2

TOP DINÂMICO + ENEM

MATRIZES

É uma tabela disposta em "m" linhas e "n" colunas.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

Prof. Estefano Franco Maciel - Matemática - Módulo 2

TOP DINÂMICO + ENEM

Tipos de Matrizes

Matriz Quadrada: é matriz cujo número de linhas é igual ao de colunas.

Matriz Transposta: é a matriz obtida trocando-se a linha pela coluna e vice-versa da matriz original.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ -5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Prof. Estefano Franco Maciel - Matemática - Módulo 2

TOP DINÂMICO + ENEM

Matriz Identidade: é a matriz quadrada cujos elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais elementos iguais a zero.

Ex:

matriz identidade de 2ª ordem matriz identidade de 3ª ordem

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

diagonal principal

Prof. Estefano Franco Maciel - Matemática - Módulo 2

TOP DINÂMICO + ENEM

$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ **Matriz Triangular:** é matriz cujos elementos localizados acima ou abaixo da diagonal principal são iguais a zero.

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **Matriz Diagonal:** é a matriz cujos elementos localizados acima e abaixo da diagonal principal são iguais a zero.

Traço da Matriz: é a soma dos elementos da diagonal principal.

$$\text{Traço: } 4 + 2 + 6 = 12$$

Prof. Estefanio Franco Maciel - Matemática - Módulo 2

TOP DINÂMICO + ENEM

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ **Matriz Simétrica:** $A = A^T$

Os elementos opostos em relação à diagonal principal são iguais.

Matriz Anti-Simétrica: $A = -A^T$

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -5 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Os elementos da diagonal principal são iguais a zero.
Os elementos opostos em relação à diagonal principal são simétricos.

Prof. Estefanio Franco Maciel - Matemática - Módulo 2

TOP DINÂMICO + ENEM

Operações com Matrizes:

Adição e Subtração de Matrizes: só podemos somar ou subtrair matrizes de mesma ordem.

Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, calcule:

$$A + B - C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 15 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Prof. Estefanio Franco Maciel - Matemática - Módulo 2

TOP DINÂMICO + ENEM

Multiplicação de Matrizes

Só podemos multiplicar duas matrizes entre si, quando o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda matriz. O resultado será uma matriz com o número de linhas da primeira e número de colunas da segunda matriz.

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1x0 + 2x(-3) + 3x4 & 1x1 + 2x5 + 3x2 \\ 0x0 - 4x(-3) - 2x4 & 0x1 - 4x5 - 2x2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 - 6 + 12 & 1 + 10 + 6 \\ 0 + 12 - 8 & 0 - 20 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 17 \\ 4 & -24 \end{bmatrix}$$

Prof. Estefanio Franco Maciel - Matemática - Módulo 2

TOP DINÂMICO + ENEM

Matriz Inversa: A^{-1}

O produto de uma matriz pela sua inversa é igual à matriz identidade. $A \cdot A^{-1} = I$

Seja $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, determine A^{-1}

$$\det A = 12 - 10$$

$$\det A = 2$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-2}{2} \\ \frac{-5}{2} & \frac{4}{2} \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{-5}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

Prof. Estefanio Franco Maciel - Matemática - Módulo 2

TOP DINÂMICO + ENEM

DETERMINANTES

I - Definição

É um número associado a uma matriz quadrada.

II - Determinante de uma matriz de 2ª ordem

Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, então:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Prof. Estefanio Franco Maciel - Matemática - Módulo 2

TOP DINÂMICO + ENEM

Ex: $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$

$$\det = 2 \cdot (-4) - 1 \cdot (-3)$$

$$\det = -8 + 3$$

$$\det = -5$$

Prof. Estefano Franco Maciel - Matemática - Módulo 2

TOP DINÂMICO + ENEM

III – Determinante de uma matriz de 3ª ordem
(Regra de Sarrus)

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \\ -1 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 4 & -3 \\ -1 & 6 & 5 & -1 & 6 \end{vmatrix} \quad \det = 3 \cdot (-3) \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 \cdot 6 - (-1) \cdot (-3) \cdot (2) - 6 \cdot 1 \cdot 3 - 5 \cdot 4 \cdot 1$$

$$\det = -45 - 1 + 48 - 6 - 18 - 20$$

$$\det = -42$$

Prof. Estefano Franco Maciel - Matemática - Módulo 2

TOP DINÂMICO + ENEM

IV – Menor Complementar (D_{ij})

É o determinante da matriz obtida após ser eliminada a linha e a coluna do elemento a_{ij} considerado.

Ex. Sendo $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, calcule D_{12}

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \quad \det = 3 + 10$$

$$\det = 13$$

$$D_{12} = 13$$

Prof. Estefano Franco Maciel - Matemática - Módulo 2

TOP DINÂMICO + ENEM

V – Cofator $C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$

Ex. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, calcule C_{21}

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \cdot D_{21}$$

$$C_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$C_{21} = (-1) \cdot [-1 - 14] \quad C_{21} = 15$$

Prof. Estefano Franco Maciel - Matemática - Módulo 2

TOP DINÂMICO + ENEM

Propriedades dos Determinantes:

1ª propriedade:

Se os elementos de uma linha ou coluna de uma matriz quadrada forem todos iguais a zero, o seu determinante será zero.

Ex. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Prof. Estefano Franco Maciel - Matemática - Módulo 2

TOP DINÂMICO + ENEM

2ª propriedade:

Se os elementos de duas linhas ou colunas de uma matriz quadrada forem iguais ou proporcionais, o seu determinante será zero.

Ex. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Prof. Estefano Franco Maciel - Matemática - Módulo 2

TOP DINÂMICO + ENEM**3ª propriedade:**

Se trocarmos de posição entre si duas linhas ou colunas de uma matriz quadrada, o determinante é o simétrico do anterior.

Ex. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

$$\det = 8 - 15 \quad \det = 15 - 8$$

$$\det = -7 \quad \det = 7$$

Prof. Estefanio Franco Maciel - Matemática - Módulo 2

TOP DINÂMICO + ENEM**4ª propriedade:**

Se multiplicarmos todos os elementos de uma linha ou coluna por um número real k , então o determinante da nova matriz é o anterior multiplicado pelo número k .

Obs: Conseqüência da propriedade:

$$\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A, \text{ onde } n \text{ é a ordem da matriz.}$$

Ex: Sendo $A_{3 \times 3}$, e $\det A = 5$, calcule $\det(2A)$.
 $\det(2A) = 2^3 \cdot \det A$, $\det(2A) = 8 \cdot 5$
 $\det(2A) = 40$

Prof. Estefanio Franco Maciel - Matemática - Módulo 2

TOP DINÂMICO + ENEM**5ª propriedade:**

O determinante de uma matriz A é igual ao determinante de sua transposta.

$$\det A = \det A^t$$

6ª propriedade:

O determinante de uma matriz A igual ao inverso do determinante da matriz inversa de A .

$$\det A = \frac{1}{\det A^{-1}}$$

Prof. Estefanio Franco Maciel - Matemática - Módulo 2

TOP DINÂMICO + ENEM**7ª propriedade:**

O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

Ex: $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 4 & 0 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det = (-3) \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2$$

$$\det = -48$$

Prof. Estefanio Franco Maciel - Matemática - Módulo 2

TOP DINÂMICO + ENEM**8ª propriedade:** Teorema de Binet

Sendo A e B duas matrizes quadradas temos que: $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
 calcule $\det(A \cdot B)$.

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

$$\det(A \cdot B) = (-14) \cdot 6$$

$$\det(A \cdot B) = -84$$

Prof. Estefanio Franco Maciel - Matemática - Módulo 2