Módulo 26

Probabilidades – Distribuição binomial

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

ROTEIRO DE ESTUDOS									
Leia com atenção	Capítulo 11 – Tópicos 4, 4.A e 4.B								
Exercícios	Série branca	501	502	503	504	507	508	510	511
	Série amarela	501	504	507	508	509	510	511	512
	Série roxa	506	508	514	515	516	517	518	519
	Foco Enem	503	504	505	508	510	511	514	515

501.

Uma moeda honesta é lançada seis vezes e, em cada lançamento, é anotada a face da moeda que fica para cima. Determine a probabilidade de saírem exatamente 3 coroas.

502.

Um dado honesto é lançado 5 vezes e, em cada lançamento, é anotado o número da face voltada para cima. Determine a probabilidade de sair o número 2 exatamente 3 vezes.

503.

Considere o lançamento de um dado honesto 5 vezes. Em cada lançamento é anotado o número da face voltada para cima. A probabilidade de sair um número par, exatamente 3 vezes, é igual a

a. $\frac{1}{32}$
b. $\frac{1}{16}$
c. $\frac{5}{32}$
d. $\frac{5}{16}$
e. $\frac{7}{64}$

504. Enem C7-H28

O psicólogo de uma empresa aplica um teste para analisar a aptidão de um candidato a determinado cargo. O teste consiste em uma série de perguntas cujas respostas devem ser "verdadeiro ou falso" e termina quando o psicólogo fizer a décima pergunta ou quando o candidato der a segunda resposta errada. Com base em testes anteriores, o psicólogo sabe que a probabilidade de o candidato errar uma resposta é 0,20.

A probabilidade de o teste terminar na quinta pergunta é

a. 0,02048
b. 0,08192
c. 0,24000
d. 0,40960
e. 0,49152

505.

Uma prova foi elaborada com 6 questões e, em cada uma delas, havia cinco alternativas, sendo apenas uma correta. Um aluno não se preparou para a prova e escolheu, aleatoriamente, uma alternativa em cada questão. A probabilidade de o aluno acertar exatamente 50% das questões é, aproximadamente, igual a

a. 0,128%
b. 8,192%
c. 5,242%
d. 6,4%
e. 50%

506.

Em um experimento aleatório, a probabilidade de ocorrer um evento A é 40%. O experimento foi repetido 4 vezes em condições idênticas. Determine a probabilidade de não ocorrer o evento A exatamente duas vezes.

507.

Em uma prova de 5 questões, com cinco alternativas cada uma e somente uma correta, um aluno escolheu aleatoriamente uma alternativa em cada questão. Determine a probabilidade de o aluno acertar exatamente uma questão.

508. Uneb-BA C7-H28

De acordo com o texto, se Cebolinha lançar a sua moeda dez vezes, a probabilidade de a face voltada para cima sair cara, em pelo menos oito dos lançamentos, é igual a

a. $\frac{5}{128}$
b. $\frac{7}{128}$
c. $\frac{15}{256}$
d. $\frac{17}{256}$
e. $\frac{25}{512}$

PV2D-17-90

509.

Lança-se um dado honesto 5 vezes e, em cada lançamento, é anotado o número da face voltada para cima. Determine a probabilidade de sair o número 2 pelo menos 4 vezes.

510.

Uma fábrica produz determinado tipo de lâmpada, sendo que, de acordo com o controle de qualidade, a probabilidade de uma lâmpada estar com defeito é de 10%. Uma pessoa comprou cinco destas lâmpadas e não testou nenhuma delas. A probabilidade de essa pessoa estar levando exatamente duas lâmpadas com defeito é igual a

a. 0,729%
b. 7,29%
c. 15%
d. 40%
e. 59,05%

511. C7-H28

Em uma população de 8 camundongos, marcados de 1 a 8, serão selecionados aleatoriamente 3 camundongos, um de cada vez e com reposição. Nessa população, três dos camundongos têm uma característica C_1, cinco têm uma característica C_2 e nenhum tem as duas características. A probabilidade de serem sorteados exatamente dois camundongos com a característica C_1 é igual a

a. $\frac{3}{8}$
b. $\frac{3}{4}$
c. $\frac{45}{64}$
d. $\frac{135}{512}$
e. $\frac{225}{512}$

512. Unirio-RJ

Numa máquina caça-níquel, cada resultado é formado por três quaisquer de cinco frutas diferentes, podendo haver repetição. Calcule a probabilidade de um resultado ter duas frutas iguais e uma diferente.

513.

Certo aparelho celular sai de fábrica com 5% de chances de estar quebrado. Em determinada loja há, na vitrine em exposição, 10 destes celulares. A probabilidade de haver exatamente dois celulares quebrados em exposição é, aproximadamente,

a. 7,5%
b. 10%
c. 12,5%
d. 15%
e. 17,5%

514. C7-H28

Em um percurso diário de determinado avião, em voos domésticos, a probabilidade de ocorrer turbulência é de 30%.

A probabilidade de em uma semana, sete dias, ocorrer turbulência em exatamente 3 voos é, aproximadamente,

a. 0,65%
b. 9,72%
c. 12,85%
d. 22,69%
e. 42,86%

515.

Em uma fábrica de certo tipo de parafuso, a probabilidade de um parafuso sair defeituoso é de 10%. Em um lote de 100 parafusos, a probabilidade de existirem exatamente 10 parafusos defeituosos é dada por

a. $\binom{90}{10} \cdot \frac{9^{90}}{10^{100}}$
b. $\binom{90}{10} \cdot \frac{1}{10^{100}}$
c. $\binom{100}{90} \cdot \frac{1}{10^{100}}$
d. $\binom{100}{90} \cdot \frac{9^{90}}{10^{100}}$
e. $\binom{10}{9} \cdot \frac{9^{90}}{10^{100}}$

516. UPF-RS

Em uma urna, há 4 bolas verdes e 3 bolas brancas. Uma bola é retirada aleatoriamente da urna, sua cor é observada, e a bola é reposta na urna. O experimento é repetido cinco vezes. Determine a probabilidade de saírem exatamente 3 bolas verdes.

517. UFRGS-RS

Em uma cidade do norte do Brasil, 90% das pessoas são favoráveis à aprovação de certo projeto municipal. Foram selecionadas aleatoriamente e com reposição 7 pessoas da cidade. Determine a probabilidade de exatamente 3 delas serem favoráveis à aprovação do projeto.

518. Fuvest-SP

Uma moeda honesta é lançada e a face voltada para cima é anotada. Determine a probabilidade de se terem 3 caras antes de 2 coroas.

519. VUNESP

Numa festa de aniversário infantil, 5 crianças comeram um alimento contaminado com uma bactéria. Sabe-se que, uma vez em contato com essa bactéria, a probabilidade de que a criança manifeste problemas intestinais é de $\frac{2}{3}$.

Sabendo que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, determine:

a. $\binom{5}{2}$ e a probabilidade de manifestação de problemas intestinais em exatamente duas crianças.

b. $\binom{5}{0}$, $\binom{5}{1}$ e a probabilidade de manifestação de problemas intestinais no máximo em uma criança.

520. UFMG

Considere uma prova de matemática constituída de quatro questões de múltipla escolha, com quatro alternativas cada uma, das quais apenas uma é correta.

Um candidato decide fazer essa prova escolhendo, aleatoriamente, uma alternativa em cada questão.

Então, é correto afirmar que a probabilidade de esse candidato acertar, nessa prova, exatamente uma questão é

a. $\frac{27}{64}$ **b.** $\frac{27}{256}$ **c.** $\frac{9}{64}$ **d.** $\frac{9}{256}$

Veja o gabarito desses exercícios propostos na página 130.

PV2D-17-90

APRESCINDERE/DREAMSTIME

12 Estatística (PARTE I)

Os estudos estatísticos aparecem no cotidiano, muitas vezes, de forma imperceptível. Uma indústria alimentícia, por exemplo, utiliza estudos estatísticos para entender a maneira como se dá o consumo de determinados alimentos pelas pessoas.

Outra indústria pode utilizar os estudos estatísticos para aplicá-los, por exemplo, no controle de qualidade de suas peças.

1. Estatística I

A. Introdução

Quando se necessita estudar alguma característica de interesse, nem sempre é possível fazer o levantamento das informações com todos os elementos envolvidos no estudo, chamados de **população**. É necessário fazer uso de uma **amostra** da população que seja representativa e forneça os dados necessários mais próximos da realidade. Uma vez definida como será a **amostra** (fase complexa, pois envolve, por exemplo, custo e tempo), é necessário fazer a coleta dos dados, denominados **dados brutos**, os quais precisam ser organizados e, geralmente, são expressos por **tabelas** e **gráficos**, que são formas práticas de apresentação, permitindo uma visualização objetiva e rápida das informações. As informações que podem ser visualizadas nas tabelas e gráficos possuem **medidas** associadas denominadas **medidas de tendência central** e **medidas de dispersão**. Em última análise, é preciso tirar conclusões sobre a população por meio da amostra. Essa fase é denominada de **inferência estatística**, sendo necessário fazerem-se ajustes entre o que a amostra fornece e o que realmente ocorre na população.

ANDREY POPOV/DREAMSTIME

O ramo da matemática que desenvolve métodos e técnicas para se determinar a amostra, a forma de coleta dos dados, o trato da organização dos dados brutos em forma de tabelas e gráficos, a análise e interpretação das informações auxiliadas pelas medidas de tendência central e medidas de dispersão e a inferência de conclusões sobre o que está sendo estudado em uma população por meio de uma amostra é denominado **estatística**.

A **estatística** apresenta três fases.

- **Amostragem**: fase em que se determina como serão a amostra e a coleta dos dados brutos.
- **Estatística descritiva**: fase em que se organizam os dados brutos em tabelas e gráficos, e fazem-se análises e interpretações por meio das medidas de centralidade e dispersão.
- **Inferência estatística**: fase em que se fazem inferências conclusivas da população por meio da amostra.

Nosso estudo estará aplicado somente à fase da estatística descritiva.

2. População e amostra

A. População

Em um estudo estatístico, dá-se o nome de **população** ao conjunto constituído de todos os elementos que possuem determinada característica que é de interesse no estudo. Por exemplo, em uma pesquisa eleitoral, a população será constituída de todos os eleitores que possuírem o título de eleitor à época da eleição.

B. Amostra

Em uma população, chama-se de **amostra** um subconjunto da população que é representativa e preserva as características em estudo. Por exemplo, em uma piscina, há interesse em saber o teor de cloro que ela apresenta. Não é preciso estudar toda a água da piscina para conhecer esse teor: basta colher uma porção, que apresentará as características de cloro pelas quais se tem interesse.

3. Variável

Chama-se **variável** a cada uma das características atribuídas a determinado grupo em estudo.

São alguns exemplos: cor de pele, idade, altura, sexo, classe social, estado civil etc.

Cada variável tem uma resposta entre os possíveis valores que ela possui. Por exemplo, sexo tem como possíveis respostas: masculino e feminino; idade pode ter como respostas: 30 anos, 45 anos etc.

As variáveis são divididas em:

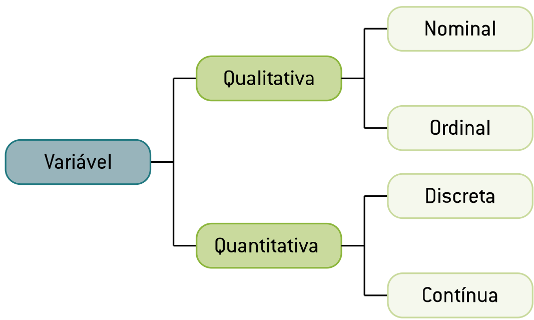
- **Variáveis qualitativas**: as respostas são atributos ou qualidades.
  Exemplos: cor de olhos, estado civil, classe social a que pertence.
- **Variáveis quantitativas**: as respostas são números reais resultantes de contagem ou medidas.
  Exemplos: renda mensal, altura, idade etc.

As variáveis qualitativas subdividem-se em:

- **Qualitativa nominal**: não é possível apresentar uma ordenação.
  Exemplos: cor de olhos, estado civil
- **Qualitativa ordinal**: apresenta algum tipo de ordenação.
  Exemplo: classe social a que pertence uma pessoa. Note que as respostas são atributos que possuem uma ordenação: classe A, classe B, classe C, ...

As variáveis qualitativas subdividem-se em:

- **Quantitativa discreta**: as respostas são números naturais.
  Exemplo: idade (em anos inteiros)
- **Quantitativa contínua**: as respostas são números pertencentes a um intervalo real.
  Exemplos: renda mensal, peso etc...



4. Rol

Dado um conjunto de dados de variáveis quantitativas, denominados dados brutos, chama-se **rol** a organização dos dados em ordem crescente ou decrescente.

Exemplo

Considere as massas, em quilogramas, de dez pessoas de certo departamento em um escritório:

45, 43, 75, 98, 60, 82, 75, 60, 71, 75

Um rol para estes dados seria:

43, 45, 60, 60, 71, 75, 75, 75, 82, 98

Utilizou-se, nesse caso, um rol crescente.

Nota

Entenda-se aqui que, quando se fala em crescente, está se falando do menor para o maior, com repetição dos números que são iguais. Rigorosamente falando, os números 75, 75 e 75 não formam um grupo de números em ordem crescente, mas, sim, constante.

5. Tabelas de frequências

Uma tabela que apresente os dados brutos, deforma caótica, não permite entendimento rápido das informações. Uma maneira de mostrar os dados de forma organizada é

PV2D-17-90

apresentá-los em tabelas denominadas **tabelas de frequências**. Nosso interesse está voltado para dois tipos de tabelas de frequências: **tabelas de frequências para dados não agrupados em classe** e **tabelas de frequências para dados agrupados em classe**.

A. Tabelas de frequências para dados não agrupados em classe

Para entender uma tabela de frequências, é necessário compreender alguns conceitos.

- **Frequência absoluta**: é o número que indica a quantidade de vezes que determinado valor de uma variável ocorreu em um conjunto de dados estatísticos. Para simplificar as representações, será utilizada a notação n_i para indicar a frequência absoluta do valor x_i da variável.

Exemplo

Considere o rol do exemplo dado anteriormente:

43, 45, 60, 60, 71, 75, 75, 75, 82, 98

A variável é a massa das pessoas de certo departamento em um escritório.

Os valores que a variável assume são os apresentados no rol.

A frequência absoluta de cada valor será a quantidade de vezes que esse valor vai aparecer.

Utilizando a notação n_i para a frequência absoluta e x_i para cada valor da variável, segue que:

$x_1 = 43$ e $n_1 = 1$ (o valor 43 aparece uma única vez)
$x_2 = 45$ e $n_2 = 1$ (o valor 45 aparece uma única vez)
$x_3 = 60$ e $n_3 = 2$ (o valor 60 aparece duas vezes)
$x_4 = 71$ e $n_4 = 1$ (o valor 71 aparece uma única vez)
$x_5 = 75$ e $n_5 = 3$ (o valor 75 aparece três vezes)
$x_6 = 82$ e $n_6 = 1$ (o valor 82 aparece uma única vez)
$x_7 = 98$ e $n_7 = 1$ (o valor 98 aparece uma única vez)

Nota

A soma de todas as frequências absolutas é igual ao número total de dados.

- **Frequência relativa**: para um determinado valor de uma variável, é a razão entre a frequência absoluta do valor e o número total de dados estatísticos. Indicando o número total de dados por **n**, e a frequência absoluta e a frequência relativa do valor x_i por, respectivamente, $\mathbf{n_i}$ e $\mathbf{f_i}$, tem-se que: $f_i = \dfrac{n_i}{n}$.

No exemplo anterior, o número total de dados estatísticos é **n** = 10. Vem, dessa forma, que:

$$f_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{1}{10}$$
$$f_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{1}{10}$$
$$f_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$
$$f_4 = \frac{n_4}{n} = \frac{1}{10}$$
$$f_5 = \frac{n_5}{n} = \frac{3}{10}$$
$$f_6 = \frac{n_6}{n} = \frac{1}{10}$$
$$f_7 = \frac{n_7}{n} = \frac{1}{10}$$

Nota

A soma de todas as frequências relativas é igual a 1.

- **Frequência relativa percentual ou porcentagem**: é a representação da frequência relativa na forma percentual. A notação usada para representar a frequência relativa percentual de um valor x_i de frequência relativa f_i é $[\%f]_i$.

Considerando o exemplo anterior, as porcentagens são dadas por:

$[\%f]_1 = 10\%$
$[\%f]_2 = 10\%$
$[\%f]_3 = 20\%$
$[\%f]_4 = 10\%$
$[\%f]_5 = 30\%$
$[\%f]_6 = 10\%$
$[\%f]_7 = 10\%$

Nota

A soma de todas as porcentagens é igual a 100%.

- **Frequência acumulada**: para um valor x_i de determinada variável, é a soma das frequências absolutas contadas desde a frequência absoluta do primeiro valor da variável até a frequência absoluta do valor x_i da variável. Será utilizada a notação N_i para indicar a frequência acumulada até o valor x_i.

No caso do exemplo que estamos acompanhando, as frequências acumuladas são:

$x_1 = 43$ e $N_1 = 1$
$x_2 = 45$ e $N_2 = 1 + 1 = 2$
$x_3 = 60$ e $N_3 = 2 + 2 = 4$
$x_4 = 71$ e $N_4 = 4 + 1 = 5$
$x_5 = 75$ e $N_5 = 5 + 3 = 8$
$x_6 = 82$ e $N_6 = 8 + 1 = 9$
$x_7 = 98$ e $N_7 = 9 + 1 = 10$

Nota

O valor da frequência acumulada do último valor da variável é igual à quantidade de dados estatísticos.

- **Frequência relativa acumulada**: para um valor x_i de determinada variável, é a soma das frequências relativas contadas desde a frequência relativa do primeiro valor da variável até a frequência relativa do valor x_i da variável. Como notação, utiliza-se $[f_a]_i$ para indicar a frequência relativa acumulada até o valor x_i.

Em nosso exemplo, as frequências relativas acumuladas são:

$$[f_a]_1 = \frac{1}{10}$$
$$[f_a]_2 = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10}$$
$$[f_a]_3 = \frac{2}{10} + \frac{2}{10} = \frac{4}{10}$$
$$[f_a]_4 = \frac{4}{10} + \frac{1}{10} = \frac{5}{10}$$
$$[f_a]_5 = \frac{5}{10} + \frac{3}{10} = \frac{8}{10}$$
$$[f_a]_6 = \frac{8}{10} + \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$
$$[f_a]_7 = \frac{9}{10} + \frac{1}{10} = 1$$

Nota

A frequência relativa acumulada do último valor é sempre igual a 1.

- **Frequência relativa percentual acumulada ou porcentagens acumuladas**: para um valor x_i de deter-

PV2D-17-90

minada variável, é a soma das frequências relativas percentuais contadas desde a frequência relativa percentual do primeiro valor da variável até a frequência relativa percentual do valor x_i da variável. Será utilizada a notação $[\%f_a]_i$ para indicar a frequência relativa percentual acumulada até o valor x_i.

Em nosso exemplo, as frequências relativas percentuais acumuladas são:

$[\%f_a]_1 = 10\%$
$[\%f_a]_2 = 20\%$
$[\%f_a]_3 = 40\%$
$[\%f_a]_4 = 50\%$
$[\%f_a]_5 = 80\%$
$[\%f_a]_6 = 90\%$
$[\%f_a]_7 = 100\%$

Nota

A frequência relativa percentual acumulada do último valor é sempre igual a 100%.

Uma **tabela de frequências** é uma tabela que apresenta pelo menos duas colunas: a primeira indica os valores da variável, e a segunda coluna, as frequências absolutas de cada valor da variável. Há, também, tabelas que apresentam outras colunas, por exemplo, a coluna de frequência relativa, e/ou a coluna de frequência relativa percentual, e/ou a coluna de frequência acumulada, e/ou a coluna de frequência relativa acumulada, e/ou a coluna de frequência relativa percentual acumulada.

Aproveitando o exemplo que estávamos seguindo, apresentamos duas tabelas de frequências: uma com as colunas variável, frequência absoluta, frequência relativa e frequência relativa percentual; e outra tabela com todas as colunas.

Exemplo 1

Para a variável massa do exemplo anterior, tem-se a seguinte tabela de frequências.

Massa (em kg)	Frequência absoluta	Frequência relativa	Frequência relativa percentual
x_i	n_i	$f_i = \frac{n_i}{n}$	$[\%f]_i$
43	1	$\frac{1}{10}$	10%
45	1	$\frac{1}{10}$	10%
60	2	$\frac{2}{10}$	20%
71	1	$\frac{1}{10}$	10%
75	3	$\frac{3}{10}$	30%
82	1	$\frac{1}{10}$	10%
98	1	$\frac{1}{10}$	10%
Total	10	1	100%

Exemplo 2

Para a variável massa do exemplo anterior, tem-se a seguinte tabela de frequências com todas as colunas.

Massa (em kg)	Frequência absoluta	Frequência relativa	Frequência relativa percentual	Frequência acumulada	Frequência relativa acumulada	Frequência relativa percentual acumulada
x_i	n_i	$f_i = \frac{n_i}{n}$	$[\%f]_i$	N_i	$[f_a]_i$	$[\%f_a]_i$
43	1	$\frac{1}{10}$	10%	1	$\frac{1}{10}$	10%
45	1	$\frac{1}{10}$	10%	2	$\frac{2}{10}$	20%
60	2	$\frac{2}{10}$	20%	4	$\frac{4}{10}$	40%
71	1	$\frac{1}{10}$	10%	5	$\frac{5}{10}$	50%
75	3	$\frac{3}{10}$	30%	8	$\frac{8}{10}$	80%
82	1	$\frac{1}{10}$	10%	9	$\frac{9}{10}$	90%
98	1	$\frac{1}{10}$	10%	10	1	100%
Total	10	1	100%			

PV2D-17-90

B. Tabelas de frequências para dados agrupados em classe

Quando a quantidade de dados é grande ou as frequências absolutas dos valores das variáveis não apresentam variações significativas, a melhor representação da tabela é por meio de intervalos reais denominados **classes**, em que a frequência de cada classe será igual à soma das frequências de todos os valores que estão contidos no intervalo real.

Uma classe será um intervalo real do tipo [a, b[, contudo na tabela o intervalo será uma classe representada por a ⊢ b, sendo que em tal representação o intervalo é fechado à esquerda e aberto à direita. Assim, o número indicado por **a** pertence ao intervalo e o número indicado por **b** não pertence ao intervalo. Um intervalo representado por a ⊢ b tem amplitude dada pela diferença (b – a). O número de classes que uma tabela pode ter varia de tabela para tabela. É preciso estabelecer uma quantidade de intervalos nem pequena demais nem grande demais para não distorcer as conclusões. Em nosso estudo, estaremos preocupados em estudar apenas as tabelas com intervalos de classes que estão prontas.

Exemplo

A seguir, apresentamos uma tabela com intervalos de classe construída com base nas alturas de uma turma de 50 pessoas escolhidas aleatoriamente.

Altura (em centímetros)	Frequência absoluta
	n_i
140 ⊢ 150	6
150 ⊢ 160	10
160 ⊢ 170	7
170 ⊢ 180	14
180 ⊢ 190	8
190 ⊢ 200	5
Total	50

Em uma tabela desse tipo, no intervalo [140, 150[, há seis valores da variável altura que variam de 140, inclusive, até 150, exclusive. Contudo, em nenhum momento podemos dizer quais são esses valores; não há como dizer se há algum valor igual a 140 cm no estudo. Isso vale para os demais intervalos. Pode-se concluir também que, no intervalo [150, 160[, há dez valores da variável altura; no intervalo [160, 170[, há sete valores, e assim por diante, e que foram estudadas 50 alturas.

Nota

Os cálculos das demais colunas seguem o mesmo tipo de raciocínio utilizado na tabela de frequências para dados não agrupados em classe.

Observe o exemplo, que é continuação do anterior.

Altura (em centímetros)	Frequência absoluta	Frequência relativa	Frequência relativa percentual	Frequência acumulada	Frequência relativa acumulada	Frequência relativa percentual acumulada
	n_i	$f_i = \frac{n_i}{n}$	$(\%f)_i$	N_i	$(f_a)_i$	$(\%f_a)_i$
140 ⊢ 150	6	0,12	12%	6	0,12	12%
150 ⊢ 160	10	0,20	20%	16	0,32	32%
160 ⊢ 170	7	0,14	14%	23	0,46	46%
170 ⊢ 180	14	0,28	28%	37	0,74	74%
180 ⊢ 190	8	0,16	16%	45	0,90	90%
190 ⊢ 200	5	0,10	10%	50	1	100%
Total	50	1	100,00%			

PV2D-17-90

6. Gráficos

Os estudo estatísticos aparecem no cotidiano e, várias vezes, nem são percebidos. Uma indústria alimentícia utiliza-se desses estudos para entender como é o consumo de determinados alimentos pelas pessoas, e, assim, abastecer os supermercados com produtos que venham a ter melhor saída. Outro exemplo é a utilização de estudos estatísticos no controle de qualidade de peças de uma indústria metalúrgica.

A. Introdução

Ao representar um conjunto de dados por meio de gráficos, temos a nosso favor a forma resumida de apresentar as informações, a qual que permite rapidez na análise visual dos dados, facilidade na interpretação das informações e maneira atraente de mostrar as informações relevantes. É comum os meios de comunicação utilizarem recursos gráficos para apresentar situações do cotidiano, por exemplo, em saúde, economia, consumo etc. Os gráficos a serem estudados serão: **gráficos de setores**, **de barras verticais**, **de barras horizontais**, **de linha poligonal**, **histogramas** e **polígonos de frequências**.

B. Gráfico de setores

Considere uma situação hipotética em que determinado produto é vendido por apenas três empresas, A, B e C. Suponha que, no mês de fevereiro de 2016, a empresa A tenha vendido 30 milhões de unidades do produto, a empresa B tenha vendido 50 milhões de unidades do produto e a empresa C tenha vendido 70 milhões de unidades do produto. Pode-se representar essas vendas em um gráfico de setores. O gráfico deverá ter três setores circulares, e o ângulo de cada setor deve guardar a proporção de venda de cada empresa em relação ao total de vendas.

Assim, no caso da empresa A, têm-se os seguintes cálculos para o ângulo do setor correspondente a esta empresa:

Ângulo do setor		Unidades vendidas (em milhões)
α_A	———————	30
$360°$	———————	$(30 + 50 + 70)$

PV2D-17-90

$$\frac{\alpha_A}{360^\circ} = \frac{30}{150}$$
$$\alpha_A = \frac{30}{150} \cdot 360^\circ$$
$$\alpha_A = 72^\circ$$

Empresa B

Ângulo do setor — Unidades vendidas (em milhões)

α_B ———————— 50

360° ———————— $(30 + 50 + 70)$

$$\frac{\alpha_B}{360^\circ} = \frac{50}{150}$$
$$\alpha_B = \frac{50}{150} \cdot 360^\circ$$
$$\alpha_B = 120^\circ$$

Empresa C

Ângulo do setor — Unidades vendidas (em milhões)

α_C ———————— 70

360° ———————— $(30 + 50 + 70)$

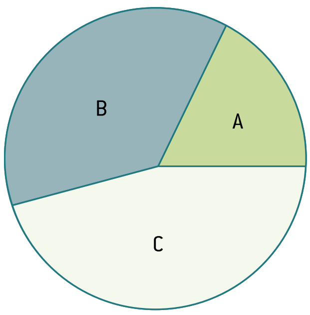
$$\frac{\alpha_C}{360^\circ} = \frac{70}{150}$$
$$\alpha_C = \frac{70}{150} \cdot 360^\circ$$
$$\alpha_C = 168^\circ$$

Nota

O ângulo correspondente à empresa C poderia ser calculado fazendo-se a diferença entre 360° e a soma dos ângulos correspondentes a A e B.

O gráfico de setores terá um setor circular reservado para a empresa A com ângulo central igual a 72°, um setor circular reservado para a empresa B com ângulo central igual a 120° e o terceiro setor circular para a empresa C com ângulo central de 168°. A seguir, tem-se um esboço do gráfico.

Vendas do produto em fevereiro de 2016

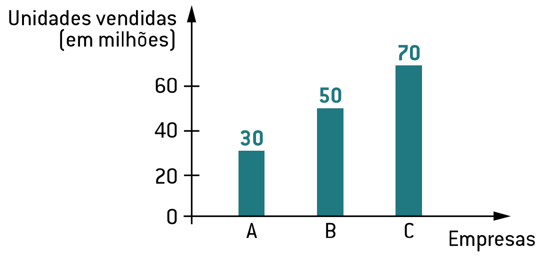


De maneira geral, se existem k valores distintos para uma variável, o círculo ficará dividido em k setores circulares, e o ângulo central de cada setor circular, em relação ao ângulo total 360°, deverá guardar a proporção de cada valor da variável em relação à soma dos valores da variável.

C. Gráfico de barras verticais

Observe o gráfico de barras verticais para o exemplo dado no item B (gráfico de setores).

Vendas do produto em fevereiro de 2016



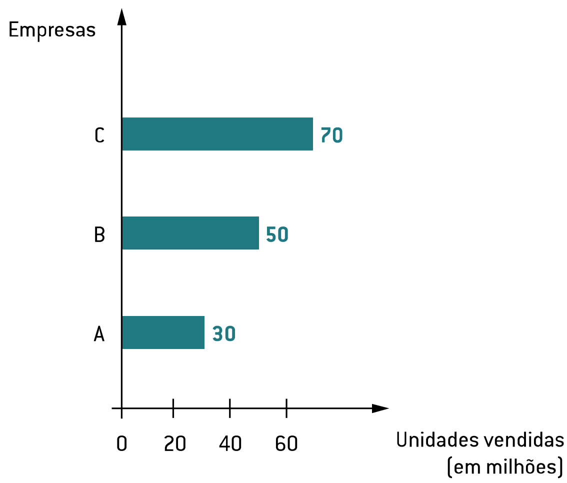
Na construção desse gráfico, é necessário estipular a altura de cada retângulo. Essas alturas são calculadas proporcionalmente. Define-se um valor de altura para o total de vendas, no caso 150 milhões, por exemplo h, e a altura de cada barra, que será proporcional à altura estipulada para o total de vendas, sendo que a proporção se dá na comparação de venda de cada empresa com o total de vendas. Assim, se a altura para o total de venda é h, a altura do retângulo para a empresa A será $\frac{30}{150}$ de h, o da empresa B será $\frac{50}{150}$ de h, e o da empresa C será $\frac{70}{150}$ de h.

No gráfico em questão, pode-se concluir que a empresa A vendeu 30 milhões de unidades, a empresa B vendeu 50 milhões de unidades e a empresa C vendeu 70 milhões de unidades.

D. Gráfico de barras horizontais

O gráfico de barras horizontais segue o mesmo tipo de raciocínio do gráfico de barras verticais. No caso das barras horizontais, a leitura é feita pelo comprimento, na horizontal da barra, em vez da altura da barra, como no caso das verticais. Acompanhe o exemplo anterior para o caso das barras horizontais.

Vendas do produto em fevereiro de 2016

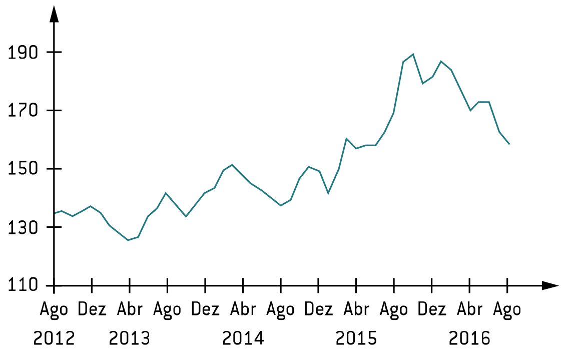


E. Gráfico de linhas ou poligonal

O gráfico a seguir consta do *Relatório de inflação*, setembro de 2016, volume 18, n. 3, página 13 da publicação do Banco Central do Brasil.

PV2D-17-90

Gráfico 1.3 – Índice de *commodities* – Brasil (IC-Br)
Dez/2005 = 100 (média mensal – R$)



BCB

Ele é um exemplo de gráfico de linha ou poligonal. Em cada mês, é marcado um ponto, em que a altura corresponde ao índice de *commodities* do mês, na comparação com dez./2005 = 100 (média mensal – R$). Um vez marcados os pontos, eles são unidos consecutivamente, de forma a construir o gráfico. Observe que o índice de *commodities*, calculado pelo Banco do Brasil, diminui de julho de 2016 para agosto de 2016.

F. Histograma

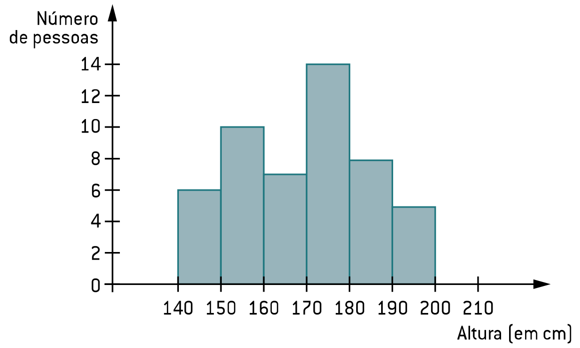
O histograma é um tipo de gráfico associado a uma distribuição de frequências para dados agrupados em classe. Ele é formado por retângulos justapostos, com a base dos retângulos no eixo horizontal, com comprimento da base igual à amplitude das classes, em uma escala predefinida. A altura dos retângulos é igual à frequência das classes, em outra escala predefinida.

Considere a tabela de frequências para dados agrupados em classe, apresentada no item 5 B.

Altura (em centímetros)	Frequência absoluta
	n_i
$140 \vdash 150$	6
$150 \vdash 160$	10
$160 \vdash 170$	7
$170 \vdash 180$	14
$180 \vdash 190$	8
$190 \vdash 200$	5
Total	50

Para construir o histograma associado a essa distribuição, estabelece-se uma escala para a amplitude das classes, que no caso é igual a 10, e uma escala para as frequências. Uma vez estabelecida a escala para a amplitude das classes e outra para as frequências, faz-se um retângulo de base 10 e altura 6 para corresponder à primeira classe; para a segunda classe, faz-se um retângulo justaposto ao anterior, com base 10 e altura 10; para a terceira classe, faz-se um retângulo justaposto ao anterior, com base 10 e altura 7; para a quarta classe, um retângulo justaposto ao anterior, de base 10 e altura 14 e, assim, até a última classe.

Procedendo dessa forma, tem-se o seguinte gráfico denominado histograma.



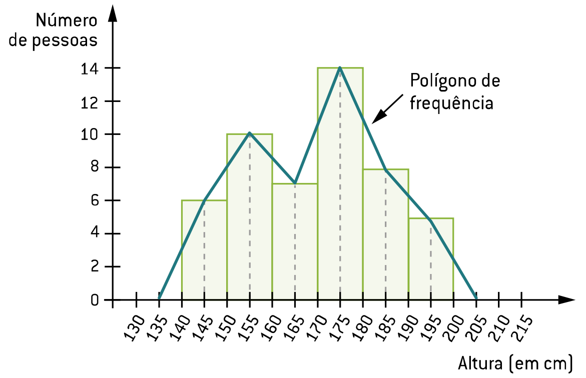
Note que, um pouco antes da abscissa 140, há uma ruptura significando não haver informações para valores menores que 140 cm.

O **histograma** é um gráfico para dados quantitativos, agrupados em classe de frequência e, por meio dele, podem-se distinguir alguns itens como forma, ponto central e variação da distribuição.

G. Polígono de frequências

O gráfico denominado **polígono de frequências** está relacionado a uma distribuição de frequências para dados agrupados em classes. Para construir o polígono de frequências, parte-se de um histograma. Na base superior de cada retângulo, marca-se o ponto médio dessa base, depois unem-se, consecutivamente, os pontos médios por segmentos de retas. Para completar o gráfico, é necessário considerar um retângulo imaginário anterior ao primeiro retângulo e posterior ao último retângulo, e o ponto médio da base superior do primeiro retângulo é unido, por um segmento de reta, ao ponto médio da base inferior do primeiro retângulo imaginário. Por sua vez, o ponto médio da base superior do último retângulo é unido, por um segmento de reta, ao ponto médio da base inferior do último retângulo imaginário.

A seguir, apresentamos o polígono de frequências do histograma anterior.

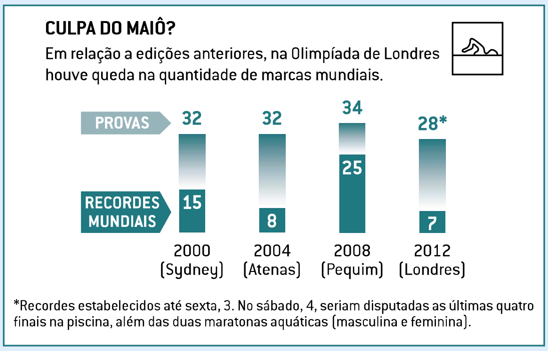


PV2D-17-90

APRENDER SEMPRE

01. UPE

O gráfico mostra o número de competições de natação das últimas olimpíadas e o número de recordes mundiais quebrados em cada uma delas.



De acordo com esse gráfico,

a. sem considerar a Olimpíada de 2012 em Londres, a maior razão entre o número de provas e o número de recordes quebrados aconteceu na Olimpíada de 2008, em Pequim.

b. para que a razão entre o número de provas e o número de recordes quebrados da Olimpíada de Londres se equipare à de Pequim, seriam necessários mais 4 recordes mundiais quebrados.

c. caso não seja quebrado mais nenhum recorde na Olimpíada de Londres, o número de recordes quebrados na Olimpíada de Sydney seria o mesmo do número de recordes quebrados em Atenas e Londres, juntos.

d. a média de recordes quebrados nas Olimpíadas de Sydney, Atenas e Pequim é de 17 recordes quebrados por olimpíada.

e. nas Olimpíadas de Sydney e Atenas, foram quebrados, ao todo, 64 recordes mundiais.

Resolução

Analisando o gráfico, observa-se que o número de recordes quebrados nas Olimpíadas de Sydney é 15. A soma do número de recordes de Atenas e, até então, de Londres é 8 + 7 = 15, sendo essa soma igual ao correspondente de Sydney.

Alternativa correta: C

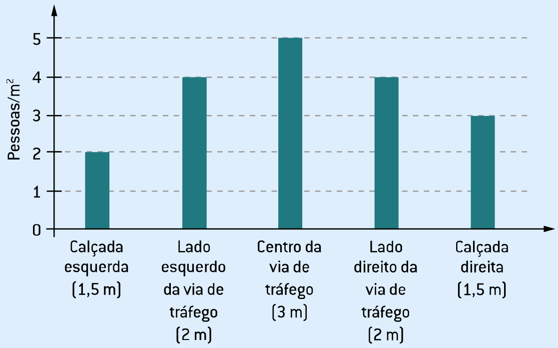
02. UNESP

Em ocasiões de concentração popular, frequentemente lemos ou escutamos informações desencontradas a respeito do número de participantes. Exemplo disso foram as informações divulgadas sobre a quantidade de manifestantes em um dos protestos na capital paulista, em junho passado. Enquanto a Polícia Militar apontava a participação de 30 mil pessoas, o *Datafolha* afirmava que havia, ao menos, 65 mil.

Disponível em: <www.folha.com.br>.

Tomando como base a foto, admita que

1. a extensão da rua plana e linear tomada pela população seja de 500 metros;
2. o gráfico forneça o número médio de pessoas por metro quadrado nas diferentes sessões transversais da rua;



3. a distribuição de pessoas por m² em cada sessão transversal da rua tenha sido uniforme em toda a extensão da manifestação.

Nessas condições, o número estimado de pessoas na foto seria de

a. 19 250
b. 5 500
c. 7 250
d. 38 500
e. 9 250

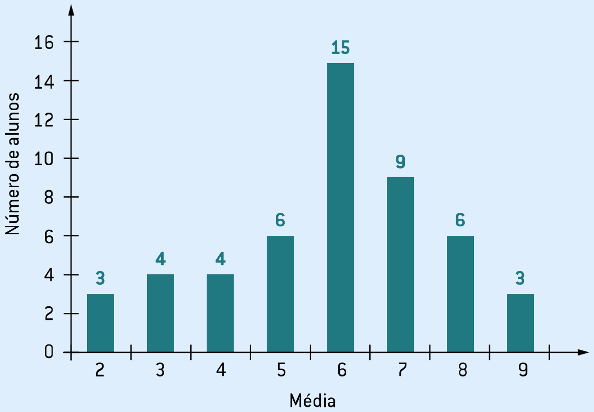
Resolução

Calçada esquerda: área = 1,5 m x 500 m = 700 m²
nº de pessoas: 2 x 750 = 1 500
Calçada direita: área = 1,5 m x 500 m = 700 m²
nº de pessoas: 3 x 750 = 2 250
Lado esquerdo + lado direito:
área = 2 m + 2 m + x 500 m = 2 000 m²
nº de pessoas: 4 x 2 000 = 8 000
Centro: área: 3 m x 500 m = 1 500 m²
nº de pessoas: 5 x 400 = 7 500
Total: 1 500 + 2 250 + 8 000 + 7 500 = 19 250
Alternativa correta: A

03. FGV-SP

A média mínima para um aluno ser aprovado em certa disciplina de uma escola é 6.

A distribuição de frequências das médias dos alunos de uma classe, nessa disciplina, é dada a seguir



A porcentagem de alunos aprovados foi

a. 62%
b. 63%
c. 64%
d. 65%
e. 66%

Resolução

Número de alunos que tiveram média maior ou igual a 6:

$15 + 9 + 6 + 3 = 33$

Número de alunos da classe:

$3 + 4 + 4 + 6 + 15 + 9 + 6 + 3 = 50$

Porcentagem pedida: $\frac{33}{50} = 0{,}66 = 66\%$

Alternativa correta: E

04. Enem

Uma empresa de alimentos oferece três valores diferentes de remuneração a seus funcionários, de acordo com o grau de instrução necessário a cada cargo. No ano de 2013, a empresa teve uma receita de 10 milhões de reais por mês e um gasto mensal com a folha salarial de R$ 400.000,00, distribuídos de acordo com o gráfico 1. No ano seguinte, a empresa ampliará o número de funcionários, mantendo o mesmo valor salarial para cada categoria. Os demais custos da empresa permanecerão constantes de 2013 para 2014. O número de funcionários em 2013 e 2014, por grau de instrução, está no gráfico 2.

Distribuição da folha salarial

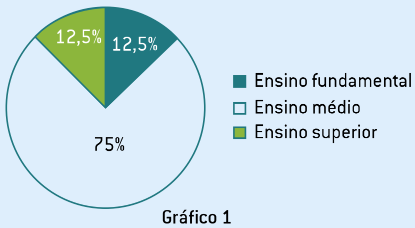


Gráfico 1

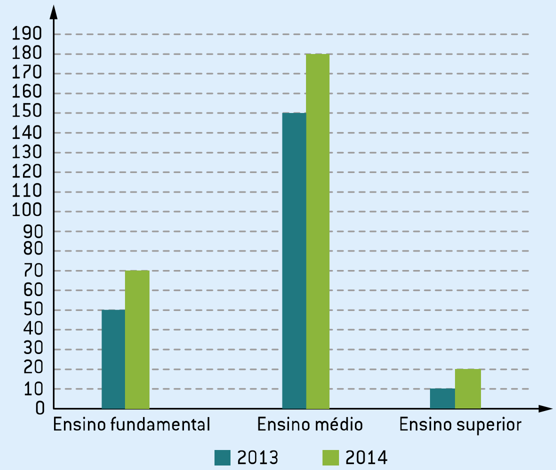


Gráfico 2

Qual deve ser o aumento na receita da empresa para que o lucro mensal em 2014 seja o mesmo de 2013?

a. R$ 114.285,00
b. R$ 130.000,00
c. R$ 160.000,00
d. R$ 210.000,00
e. R$ 213.333,00

Resolução

Quadro de funcionários separados por grau de instrução em 2013:

Grau de instrução	Salário total (R$)	Número de funcionários	Salário por funcionário
E.M.	300 000	150	2 000
E.F.	50 000	50	1 000
E.S.	50 000	10	5 000

De acordo com o novo quadro de funcionários, a empresa terá um gasto total com esses funcionários de:

$70 \cdot 1\,000 + 180 \cdot 2\,000 + 20 \cdot 5\,000 = 530\,000$

Assim, o aumento da receita deverá ser de R$ 130.000,00.

Alternativa correta: B

7. Medidas de tendência central

Tabelas e gráficos são ferramentas importantes para a interpretação das informações estatísticas; contudo, há algumas medidas que auxiliam uma interpretação mais detalhada das informações. Em um campeonato de futebol, por exemplo, comenta-se que certo time teve a média de gols igual a 2,5. Não é possível marcar 2,5 gols em uma partida, mas tal time teve seus gols tendendo a esse valor médio. As medidas que indicam a tendência da concentração dos dados são conhecidas como **medidas de tendência central**, e a média aritmética, por ser um valor médio, é uma dessas medidas. Há também outras duas medidas conhecidas por moda e mediana.

PV2D-17-90

A. Média aritmética

Suponha que, para certo time A, a soma dos gols marcados nos 10 primeiros jogos tenha sido igual a 18. Se for efetuada a divisão deste número por 10, que é o número de jogos, será encontrado um valor denominado média aritmética dos gols marcados pelo time nos 10 primeiros jogos.

Em geral, dados n valores, $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, de uma variável x, chama-se média aritmética o resultado da divisão da soma dos valores da variável pelo número n.

Representando a média aritmética por $\bar{x}$, segue que:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

Média aritmética é um valor no qual os demais valores da variável tendem a se distribuir. Ela se torna mais importante à medida que a dispersão dos valores em torno dela fica cada vez menor.

B. Média aritmética ponderada

Considere o rol:

1, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 10, 10, 10

Uma maneira de calcular a média aritmética desses números seria da seguinte forma:

$$\bar{x} = \frac{1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 + 5 + 10 + 10 + 10}{15}$$

A mesma média poderia ser calculada da seguinte forma:

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 5 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 10 \cdot 3}{5 + 2 + 2 + 3 + 3}$$

Esta última forma de calcular é denominada média aritmética ponderada. Nesse caso, note que o número 1 aparece 5 vezes, então diz-se que o número 1 tem peso 5; o número 3 aparece duas vezes, então diz-se que o número 3 tem peso 2. Assim, tem-se que o número 4 tem peso 2, o número 5 tem peso 3 e o número 10 tem peso 3. O que chamamos de peso pode ser também chamado de frequência. Desse modo, a frequência do número 1 é 5, a frequência do número 3 é 2, a frequência do número 4 é 2, a frequência do número 5 é 3 e a frequência do número 10 é 3.

Em geral, quando os valores de uma variável x são $x_1, x_2, x_3, ..., x_k$ com as respectivas frequências, $n_1, n_2, n_3, ..., n_k$, a média ponderada dos valores é dada por:

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + x_3 \cdot n_3 + \cdots + x_k \cdot n_k}{n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k}$$

APRENDER SEMPRE 18

01. UEG-GO

A Universidade Estadual de Goiás mudou seu sistema de avaliação e uma das mudanças é o cálculo da média final, que passou a ser dado por: média final = $\frac{2N_1 + 3N_2}{5}$, onde N_1 e N_2 são a primeira e segunda notas do aluno, respectivamente. Se um aluno tiver 5,0 e 7,0 na primeira e na segunda nota, respectivamente, a média final desse aluno será

a. 6,3
b. 6,2
c. 6,1
d. 6,0

Resolução

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 7}{5}$$

$$\bar{x} = \frac{31}{5} = 6,2$$

Alternativa correta: B

02. UNCISAL

Em cada bimestre, uma faculdade exige a realização de quatro tipos de avaliação, calculando a nota bimestral pela média ponderada dessas avaliações. Se a tabela apresenta as notas obtidas por uma aluna nos quatro tipos de avaliações realizadas e os pesos dessas avaliações,

Avaliação	Nota	Peso
Prova escrita	6,00	4
Avaliação continuada	7,00	4
Seminário	8,00	2
Trabalho em grupo	9,00	2

sua nota bimestral foi, aproximadamente, igual a

a. 8,6
b. 8,0
c. 7,5
d. 7,2
e. 6,8

Resolução

$$\bar{x} = \frac{6 \cdot 4 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 2}{4 + 4 + 2 + 2}$$

$$\bar{x} = \frac{24 + 28 + 16 + 18}{12}$$

$$\bar{x} = \frac{86}{12} = 7,1666...$$

$$\bar{x} \cong 7,2$$

A nota bimestral foi, aproximadamente, 7,2.
Alternativa correta: D

PV2D-17-90

03. Enem

Cinco empresas de gêneros alimentícios encontram-se à venda. Um empresário, almejando ampliar seus investimentos, deseja comprar uma dessas empresas. Para escolher qual delas irá comprar, analisa o lucro (em milhões de reais) de cada uma delas, em função de seus tempos (em anos) de existência, decidindo comprar a empresa que apresenta o maior lucro médio anual.

O quadro apresenta o lucro (em milhões de reais) acumulado ao longo do tempo (em anos) de existência de cada empresa.

Empresa	Lucro (em milhões de reais)	Tempo (em anos)
F	24	3,0
G	24	2,0
H	25	2,5
M	15	1,5
P	9	1,5

O empresário decidiu comprar a empresa

a. F.
b. G.
c. H.
d. M.
e. P.

Resolução

Calculando o lucro médio de cada empresa em milhões de reais por ano, temos:

$$F: \frac{24}{3} = 8$$

$$G: \frac{24}{2} = 12$$

$$H: \frac{25}{2,5} = 10$$

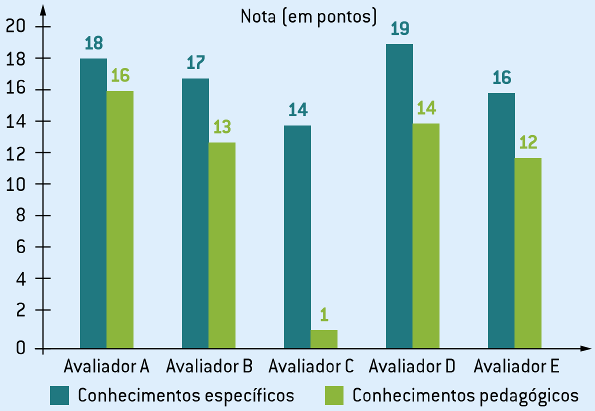
$$M: \frac{15}{1,5} = 10$$

$$P: \frac{9}{1,5} = 6$$

Portanto, o empresário decidiu comprar a empresa G.

04. Enem

As notas de um professor que participou de um processo seletivo, em que a banca avaliadora era composta de cinco membros, são apresentadas no gráfico. Sabe-se que cada membro da banca atribuiu duas notas ao professor, uma relativa aos conhecimentos específicos da área de atuação e outra, aos conhecimentos pedagógicos, e que a média final do professor foi dada pela média aritmética de todas as notas atribuídas pela banca avaliadora.



Utilizando um novo critério, essa banca avaliadora resolveu descartar a maior e a menor notas atribuídas ao professor.

A nova média, em relação à média anterior, é

a. 0,25 ponto maior.
b. 1,00 ponto maior.
c. 1,00 ponto menor.
d. 1,25 ponto maior.
e. 2,00 pontos menor.

Resolução

Média inicial =

$$= \frac{18 + 16 + 17 + 13 + 14 + 1 + 19 + 14 + 16 + 12}{10} =$$

$$= \frac{140}{10} = 14,0$$

$$\text{Nova média} = \frac{140 - 19 - 1}{10 - 1 - 1} = \frac{120}{8} = 15,0$$

15,0 – 14,0 = 1,0

Portanto, a nova média, em relação à média anterior, é 1,0 ponto maior.

Alternativa correta: B

PV2D-17-90

Módulo 27

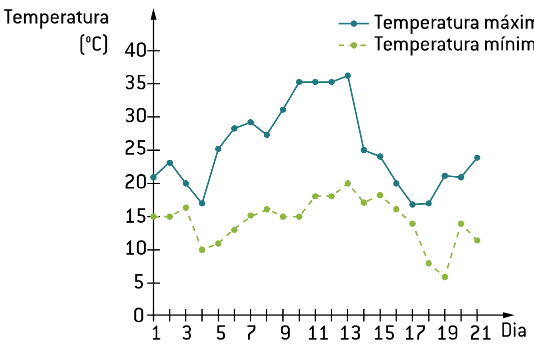
Estatística I

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

ROTEIRO DE ESTUDOS	Leia com atenção	Capítulo 12 – Tópicos 1, 1.A, 2, 2.A, 2.B, 3, 4, 5, 5.A, 5.B, 6, 6.A, 6.B, 6.C, 6.D, 6.E, 6.F, 6.G, 7, 7.A e 7.B							
Exercícios	Série branca	521	522	523	524	527	528	530	531
	Série amarela	521	524	527	528	529	530	531	532
	Série roxa	526	528	534	535	536	537	538	539
	Foco Enem	523	524	525	528	530	531	534	535

521. UFRGS-RS

O gráfico a seguir mostra o registro das temperaturas máximas e mínimas em uma cidade, nos primeiros 21 dias do mês de setembro de 2013.

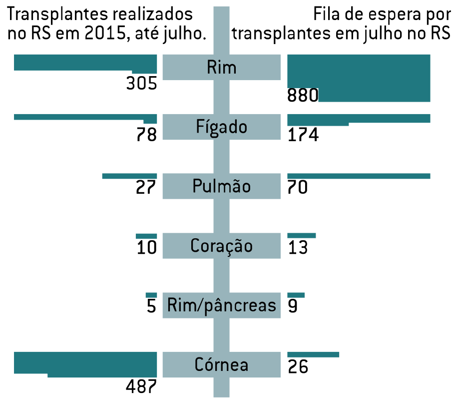


Assinale a alternativa correta com base nos dados apresentados no gráfico.

a. No dia 13, foi registrada a menor temperatura mínima do período.
b. Entre os dias 3 e 7, as temperaturas máximas foram aumentando dia a dia.
c. Entre os dias 13 e 19, as temperaturas mínimas diminuíram dia a dia.
d. No dia 19, foi registrada a menor temperatura máxima do período.
e. No dia 19, foi registrada a menor temperatura do período.

522. UFRGS-RS

Observe o gráfico.



Jornal Zero Hora

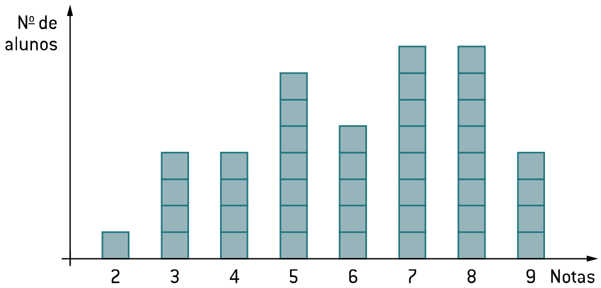
Nele está retratado o número de transplantes realizados no Rio Grande do Sul, até julho de 2015, e a quantidade de pessoas que aguardam na fila por um transplante no estado no mês de julho de 2015.

Assinale a alternativa que está de acordo com as informações do gráfico.

a. Mais de 50% dos transplantes realizados no RS, até julho de 2015, foram transplantes de córnea.
b. O percentual de pessoas que aguardavam transplante de pulmão em julho de 2015 era 70% do total de pessoas na fila de espera por transplantes.
c. O transplante de fígado é o que apresenta maior diferença percentual entre o número de transplantes realizados e o número de pessoas que aguardavam transplante.
d. O número de transplantes de fígado realizados até julho de 2015 é 288% maior do que o número de transplantes de pulmão realizados no mesmo período.
e. O transplante de córneas é o que tem a menor quantidade de pessoas aguardando transplante.

523. ESPM-SP

O gráfico mostra a distribuição das notas obtidas por uma turma de 40 alunos numa prova de matemática.



Pode-se concluir que a média aritmética das notas dessa turma foi

a. 6,35 **c.** 6,85 **e.** 6,15
b. 7,05 **d.** 7,25

524. Enem C7-H27

O Ministério da Saúde e as unidades federadas promovem frequentemente campanhas nacionais e locais de incentivo à doação voluntária de sangue, em regiões com menor número de doadores por habitante, com o intuito de manter a regularidade de estoques nos serviços hemoterápicos. Em 2010, foram recolhidos dados sobre o número de doadores

PV2D-17-90

e o número de habitantes de cada região conforme o quadro seguinte:

Taxa de doação de sangue, por região, em 2010			
Região	Doadores	Número de habitantes	Doadores/ habitantes
Nordeste	820 950	53 081 950	1,5%
Norte	232 079	15 864 454	1,5%
Sudeste	1 521 766	80 364 410	1,9%
Centro-Oeste	362 334	14 058 094	2,6%
Sul	690 391	27 386 891	2,5%
Total	3 627 529	190 755 799	1,9%

Os resultados obtidos permitiram que estados, municípios e o governo federal estabelecessem as regiões prioritárias do país para a intensificação das campanhas de doação de sangue.

A campanha deveria ser intensificada nas regiões em que o percentual de doadores por habitantes fosse menor ou igual ao do país.

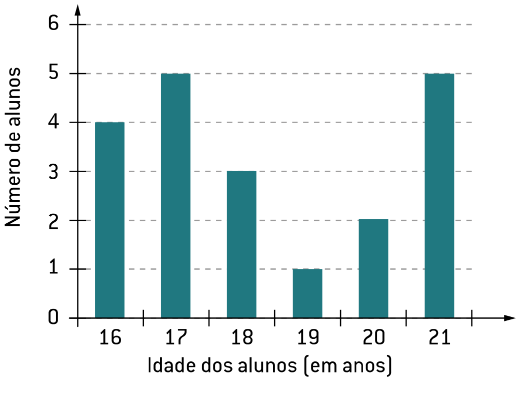
Disponível em: <http://bvsms.saude.gov.br>. Acesso em: 2 ago. 2013. Adaptado.

As regiões brasileiras onde foram intensificadas as campanhas na época são

a. Norte, Centro-Oeste e Sul.
b. Norte, Nordeste e Sudeste.
c. Nordeste, Norte e Sul.
d. Nordeste, Sudeste e Sul.
e. Centro-Oeste, Sul e Sudeste.

525. Unifor-CE

O diretor de um curso de Inglês resolve montar as turmas fazendo uma distribuição por idade dos alunos do curso. O gráfico representa a quantidade de alunos por idade.



Qual a porcentagem de alunos que irá formar uma turma com idade de 16 a 17 anos?

a. 20%
b. 30%
c. 45%
d. 55%
e. 65%

526. UNESP

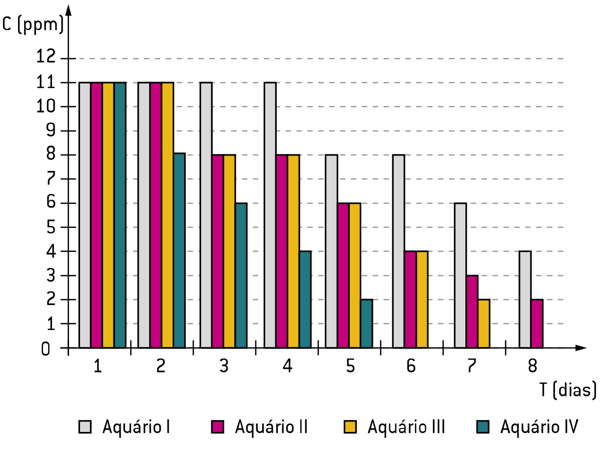
Em uma dissertação de mestrado, a autora investigou a possível influência do descarte de óleo de cozinha na água. Diariamente, o nível de oxigênio dissolvido na água de 4 aquários, que continham plantas aquáticas submersas, foi monitorado.

I II III IV

Cada aquário continha diferentes composições do volume ocupado pela água e pelo óleo de cozinha, conforme consta na tabela.

Percentual do volume	I	II	III	IV
Óleo	0	10	20	30
Água	100	90	80	70

Como resultado da pesquisa, foi obtido o gráfico que registra o nível de concentração de oxigênio dissolvido na água (C), em partes por milhão (ppm), ao longo dos oito dias de experimento (T).



Tomando por base os dados e resultados apresentados, é correto afirmar que, no período e nas condições do experimento,

a. não há dados suficientes para se estabelecer o nível de influência da quantidade de óleo na água sobre o nível de concentração de oxigênio nela dissolvido.
b. quanto maior a quantidade de óleo na água, maior a sua influência sobre o nível de concentração de oxigênio nela dissolvido.
c. quanto menor a quantidade de óleo na água, maior a sua influência sobre o nível de concentração de oxigênio nela dissolvido.
d. quanto maior a quantidade de óleo na água, menor a sua influência sobre o nível de concentração de oxigênio nela dissolvido.
e. não houve influência da quantidade de óleo na água sobre o nível de concentração de oxigênio nela dissolvido.

527. UEG-GO

A tabela apresenta o número de ônibus utilizados no transporte público de um município e o número de passageiros transportados num período de cinco dias.

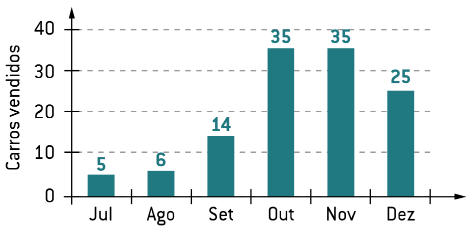
Número de ônibus	Número de passageiros
47	1 410
50	1 400
48	1 536
52	1 352
49	1 666

Os dados da tabela indicam que o número médio de passageiros transportados por ônibus nesse município durante esse período é

a. superior a 30 e inferior a 40.
b. inferior a 30.
c. superior a 40 e inferior a 50.
d. superior a 50.

528. Enem C7-H27

Após encerrar o período de vendas de 2012, uma concessionária fez um levantamento das vendas de carros novos no último semestre desse ano. Os dados estão expressos no gráfico.



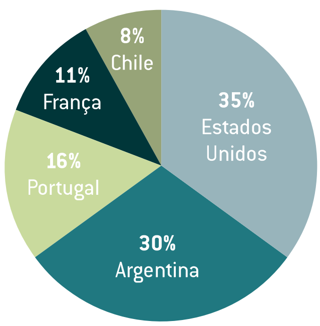
Ao fazer a apresentação dos dados aos funcionários, o gerente estipulou como meta para o mês de janeiro de 2013 um volume de vendas 20% superior à média mensal de vendas do semestre anterior.

Para atingir essa meta, a quantidade mínima de carros que deveriam ser vendidos em janeiro de 2013 seria

a. 17
b. 20
c. 21
d. 24
e. 30

529.

Em 2010, cerca de 3,24 milhões de passageiros foram transportados entre os Estados Unidos e o Brasil, de acordo com dados divulgados pela Agência Nacional de Aviação Civil (ANAC). O gráfico mostra a distribuição relativa do número de passageiros transportados entre o Brasil e os cinco destinos mais procurados, dos quais apenas dois países são europeus: França e Portugal.

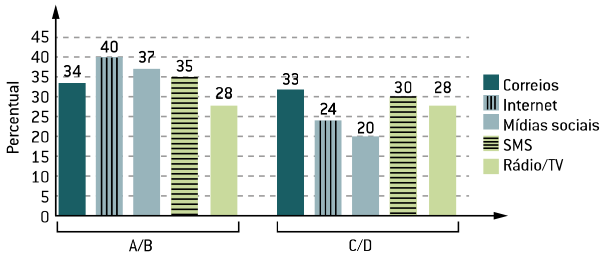


De acordo com esses dados, o valor mais aproximado para a quantidade total de passageiros transportados em 2010 entre o Brasil e os países europeus mostrados no gráfico é

a. 874 800
b. 1 018 285
c. 1 481 142
d. 2 499 428
e. 3 240 000

530. Enem

Uma pesquisa de mercado foi realizada entre os consumidores das classes sociais A, B, C e D que costumam participar de promoções tipo sorteio ou concurso. Os dados comparativos, expressos no gráfico, revelam a participação desses consumidores em cinco categorias: via Correios (juntando embalagens ou recortando códigos de barra), via internet (cadastrando-se no site da empresa/marca promotora), via mídias sociais (redes sociais), via SMS (mensagem por celular) ou via rádio/TV.



Uma empresa vai lançar uma promoção utilizando apenas uma categoria nas classes A e B (A/B) e uma categoria nas classes C e D (C/D).

De acordo com o resultado da pesquisa, para atingir o maior número de consumidores das classes A/B e C/D, a empresa deve realizar a promoção, respectivamente, via

a. Correios e SMS.
b. internet e Correios.
c. internet e internet.
d. internet e mídias sociais.
e. rádio/TV e rádio/TV.

531. Enem C7-H27

Cinco amigos marcaram uma viagem à praia em dezembro. Para economizar, combinaram ir num único carro. Cada amigo anotou quantos quilômetros seu carro fez, em média, por litro de gasolina, nos meses de setembro, outubro e novembro. Ao final desse trimestre, calcularam a média dos três valores obtidos para escolherem o carro mais econômico, ou seja, o que teve a maior média. Os dados estão representados na tabela:

Carro	Desempenho médio mensal (km/litro)		
	Setembro	Outubro	Novembro
I	6,2	9,0	9,3
II	6,7	6,8	9,5
III	8,3	8,7	9,0
IV	8,5	7,5	8,5
V	8,0	8,0	8,0

Qual carro os amigos deverão escolher para a viagem?

a. I
b. II
c. III
d. IV
e. V

PV2D-17-90

532. Eear-SP

A tabela informa a quantidade de pessoas que compraram ingressos antecipados de um determinado *show*, cujos preços eram modificados semanalmente.

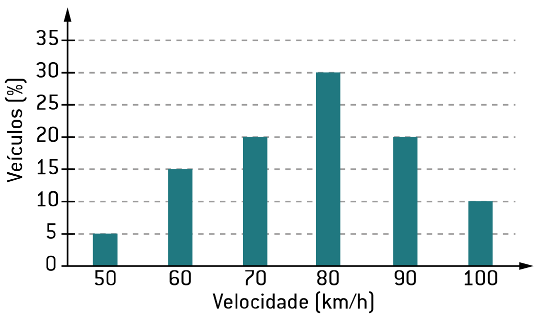
Valor do ingresso (R$)	Número de pessoas
50 ⊢ 75	300
75 ⊢ 100	640
100 ⊢ 125	500
125 ⊢ 150	1 310
150 ⊢ 175	850
	$\sum = 3\,600$

O percentual de pessoas que adquiriram o ingresso por menos de R$ 125,00 foi

a. 40% **b.** 45% **c.** 50% **d.** 55%

533. UERJ

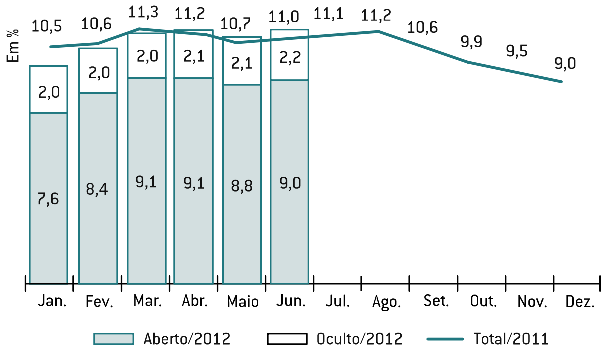
Técnicos do órgão de trânsito recomendaram velocidade máxima de 80 km/h no trecho de uma rodovia onde ocorrem muitos acidentes. Para saber se os motoristas estavam cumprindo as recomendações, foi instalado um radar móvel no local. O aparelho registrou os seguintes resultados percentuais relativos às velocidades dos veículos ao longo de trinta dias, conforme o gráfico.



Determine a média de velocidade, em km/h, dos veículos que trafegaram no local nesse período.

534. Enem C7-H27

O gráfico apresenta as taxas de desemprego durante o ano de 2011 e o primeiro semestre de 2012 na Região Metropolitana de São Paulo. A taxa de desemprego total é a soma das taxas de desemprego aberto e oculto.



Suponha que a taxa de desemprego oculto do mês de dezembro de 2012 tenha sido a metade da mesma taxa em junho de 2012 e que a taxa de desemprego total em dezembro de 2012 seja igual a essa taxa em dezembro de 2011.

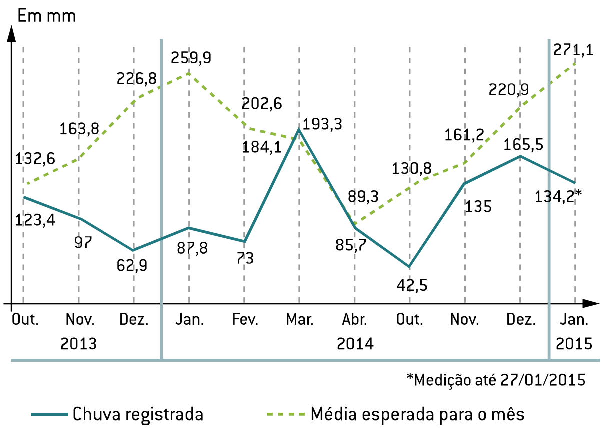
Disponível em: <www.dieese.org.br>. Acesso em: 1 ago. 2012. Fragmento.

Nesse caso, a taxa de desemprego aberto de dezembro de 2012 teria sido, em termos percentuais, de

a. 1,1
b. 3,5
c. 4,5
d. 6,8
e. 7,9

535. UEG-GO

Na figura, vê-se o gráfico comparativo entre a quantidade de chuva esperada e a quantidade de chuva registrada no sistema de captação de água Cantareira.

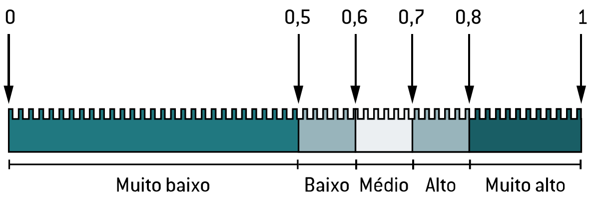


De acordo com o gráfico, o mês em que ocorreu a maior diferença entre o volume de chuva esperada e o volume de chuva registrada foi o de

a. dezembro de 2013.
b. janeiro de 2014.
c. março de 2014.
d. janeiro de 2015.

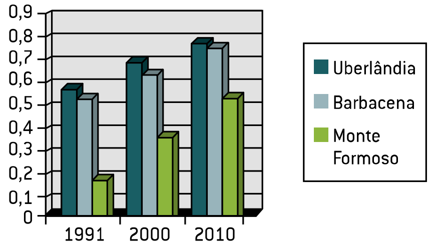
536. EPCar-MG/ AFA-SP

No *Atlas de Desenvolvimento Humano no Brasil 2013* constam valores do Índice de Desenvolvimento Humano Municipal (IDHM) de todas as cidades dos estados brasileiros. O IDHM é um número que varia entre 0 e 1. Quanto mais próximo de 1, maior o desenvolvimento humano de um município, conforme a escala.



A seguir, está relacionado o IDHM de duas cidades de Minas Gerais em condições extremas, Monte Formoso e Uberlândia, e de uma em situação intermediária, Barbacena.

PV2D-17-90



Analisando os dados, afirma-se que

I. o município de maior crescimento do IDHM, nos períodos considerados, é Monte Formoso;

II. de 2000 para 2010, Barbacena apresentou maior evolução do IDHM que Uberlândia;

III. uma tabela que relaciona cidade, época e faixa de IDHM pode ser representada corretamente como:

	Monte Formoso	Barbacena	Uberlândia
1991	Muito baixo	Baixo	Baixo
2000	Muito baixo	Alto	Alto
2010	Baixo	Alto	Alto

São corretas

a. apenas I e II.

b. apenas II e III.

c. apenas I e III.

d. I, II e III.

537. UNCISAL

Num certo dia do mês de novembro de 2015, seis barracas da feirinha de artesanato da Pajuçara vendiam castanhas de caju em embalagens com pesos variados de acordo com a tabela.

Barraca	Embalagem (g)	Preço (R$)
A	1 000	48,00
B	800	44,00
C	1 000	45,00
D	1 000	48,00
E	800	40,00
F	800	40,00

Nesse dia, o preço médio de venda do quilo da castanha, desprezando-se os centavos, era

a. R$ 44,00

b. R$ 47,00

c. R$ 49,00

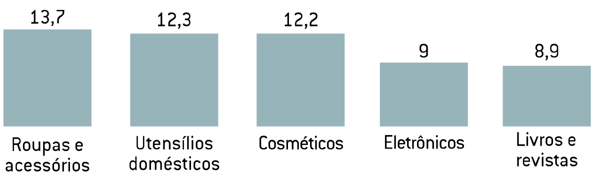
d. R$ 59,00

e. R$ 900,00

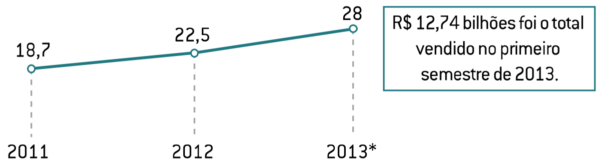
538. UFG-GO

Os gráficos apresentam os dados referentes ao comércio eletrônico no Brasil em 2013.

Os produtos mais vendidos no primeiro semestre de 2013, em %



Evolução das vendas, em R$ bilhões



* Projeção

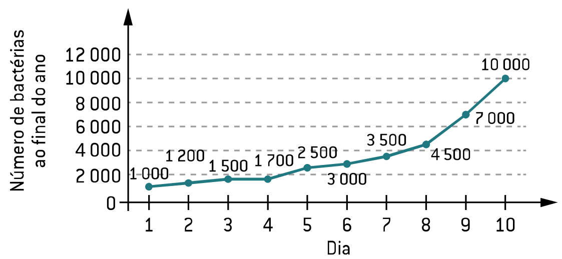
FOLHA DE S. PAULO, São Paulo, 21 set. 2013, p. 1. Adaptado.

De acordo com os dados apresentados nesses gráficos, considerando que os produtos mais vendidos no segundo semestre tenham o mesmo porcentual de vendas do primeiro semestre de 2013, calcule o valor correspondente às vendas de produtos eletrônicos no segundo semestre de 2013.

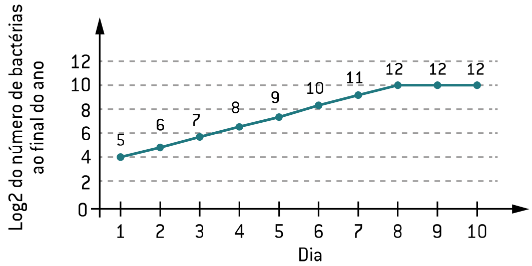
539. FGV-SP

Um biólogo inicia o cultivo de três populações de bactérias (A, B e C) no mesmo dia. Os gráficos seguintes mostram a evolução do número de bactérias ao longo dos dias.

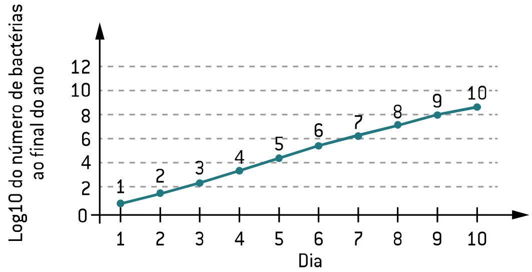
População de bactérias A



População de bactérias B



População de bactérias C



Com base na informação dos gráficos, responda ao que se pede.

a. Em que dia o número de bactérias da população C ultrapassou o da população A?

b. Qual foi a porcentagem de aumento da população de bactérias B, entre o final do dia 2 e o final do dia 6?

PV2D-17-90

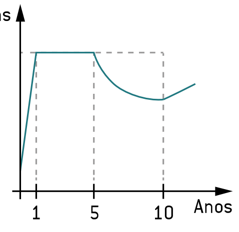
c. Qual foi a porcentagem de aumento da população total de bactérias (colônias A, B e C somadas) entre o final do dia 2 e o final do dia 5?

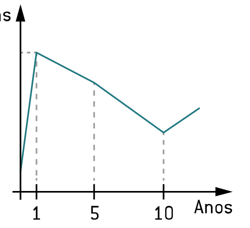
540. Cefet-RJ

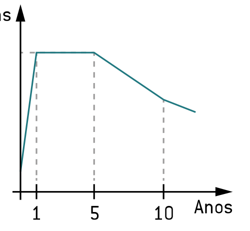
Empresários de um determinado segmento do mercado de automóveis contrataram uma consultoria para monitorar a venda de um de seus produtos líderes, ao longo de um período de 15 anos. Findo este período, os consultores têm os seguintes dados:

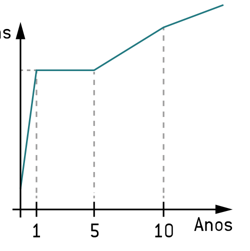
I. No primeiro ano, as vendas cresceram.
II. Do segundo ao quinto ano, as vendas permaneceram praticamente estáveis.
III. Do sexto ao décimo ano, as vendas decresceram.
IV. A partir do décimo primeiro ano, verifica-se uma tendência de crescimento nas vendas.

Dentre os gráficos, o que se aproxima dos dados é:

a.


b.


c.


d.


Veja o gabarito desses exercícios propostos na página 130.

PV2D-17-90

Gabarito dos Exercícios Propostos

Módulo 25

481. D **483.** B **485.** C

482. B **484.** A **486.** B

487. $P = \frac{1}{2}$

488. D **490.** A **492.** C

489. D **491.** E

493. a. Será necessário retirar, no mínimo, 10 lápis, pois podem ocorrer:
3 lápis azuis + 3 lápis vermelhos + 3 lápis amarelos.
Portanto, a próxima retirada garantirá 4 lápis de uma mesma cor.

b. Probabilidade $\frac{6}{95}$

494. D **496.** A

495. C **497.** D

498. a. $P(A) = \frac{15}{56}$

b. $P(A|B) = \frac{1}{3}$

499. a. $\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{\underbrace{4!}_{\underset{210}{A\binom{\text{somente}}{\text{meninas}}}}}\ \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{\underbrace{4!}_{\underset{15}{B\binom{\text{somente}}{\text{meninos}}}}}\ \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{\underbrace{4!}_{\underset{15}{C\binom{\text{somente}}{\text{meninas}}}}}\ \frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{\underbrace{4!}_{\underset{1}{D}}}$

Existem 47 250 maneiras distintas de essas 16 crianças serem distribuídas da forma solicitada.

b. A probabilidade de uma menina vencer o torneio é de $\frac{44}{125}$.

500. a. A probabilidade de Sócrates conquistar um território é $\frac{2}{27}$.

b. A probabilidade de Sócrates conquistar um território é $\frac{43}{216}$.

Módulo 26

501. $P(3S \text{ e } 3F) = \frac{5}{16}$

502. $P(3S \text{ e } 2F) = \frac{125}{3\,888}$

503. D **504.** B **505.** B

506. P(2S e 2F) = 34,56%

507. P(1S e 4F) = 40,96%

508. B

509. P(sair o nº 2 pelo menos 4 vezes) = $\frac{13}{3\,888}$

510. B **511.** D

512. P = 5 · P(2S e 1F) = 18%

513. A **514.** D **515.** D

516. $P(3S \text{ e } 2F) = \frac{5\,760}{16\,807}$

517. P(3S e 4F) = 0,25515%

518. $P = \frac{5}{16}$

519. a. $P(2S \text{ e } 3F) = \frac{40}{243}$

b. P(no máximo em uma) = $\frac{11}{243}$

520. A

Módulo 27

521. E **524.** B **527.** B **530.** B

522. A **525.** C **528.** D **531.** C

523. E **526.** B **529.** D **532.** A

533. A média das velocidades é igual a 77,50 km/h.

534. E **536.** A

535. B **537.** C

538. O valor correspondente às vendas de produtos eletrônicos será de, aproximadamente, 1,37 bilhões de reais.

539. a. Analisando o número de bactérias de A no gráfico e calculando o número de bactérias de C, segue a seguinte tabela:

Dia	Número de bactérias A	Número de bactérias C
1	1 000	$10^1 = 10$
2	1 200	$10^2 = 100$
3	1 500	$10^3 = 1\,000$
4	1 700	$10^4 = 10\,000$

b. O aumento foi de 1 500%.

c. Houve um aumento percentual de, aproximadamente, 7 452%.

540. A

PV2D-17-90