Módulo 110

Divisão de polinômios: dispositivo de Briot-Ruffini

Exercícios de **Aplicação**

01.

Considere os polinômios $P(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3x - 5$ e $d(x) = x + 2$.

a. Efetue a divisão de $P(x)$ por $d(x)$, utilizando o método da chave, e escreva o quociente e o resto.

b. Efetue a divisão de $P(x)$ por $d(x)$, utilizando o método de Briot-Ruffini, e escreva o quociente e o resto.

c. Calcule $P(-2)$ e compare com o resto encontrado nos itens anteriores.

Resolução

a.

$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^3 & +4x^2 & +3x & -5 & x+2 \\ \cline{5-5} -2x^3 & -4x^2 & & & 2x^2+3 \\ \cline{1-4} 0 & +\ 0 & +3x & -5 & \\ & & -3x & -6 & \\ \cline{1-4} & & & -11 & \end{array}$$

$q(x) = 2x^2 + 3,\ r(x) = -11$

b.

−2	2	4	3	−5
	2	0	3	−11

$q(x) = 2x^2 + 3,\ r(x) = -1$

c. $P(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + 4 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot (-2) - 5$

$P(-2) = -16 + 16 - 6 - 5 = -11$

$P(-2)$ e $r(x)$ são iguais.

Portanto: $P(-2) = r(x)$.

02.

Efetue a divisão de $P(x) = 3x^4 - 13x^3 + 7x^2 + 11x + 6$ por $d(x) = 3x - 1$, fazendo uso do dispositivo prático de Briot-Ruffini. Escreva o quociente e o resto da divisão.

Resolução

$P(x) = (3x - 1) \cdot Q(x) + r$

$$P(x) = 3 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) \cdot Q(x) + r$$

$$P(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right) \cdot \left[3 \cdot Q(x)\right] + r$$

Fazendo $3 \cdot Q(x) = q(x)$, segue que:

$$P(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right) \cdot q(x) + r$$

Se for efetuada a divisão de $P(x)$ por $\left(x - \frac{1}{3}\right)$, serão encontrados o quociente $q(x)$ e o resto r.

O resto r também será resto da divisão de $P(x)$ por $(3x - 1)$.

O quociente $Q(x)$, na divisão de $P(x)$, por $(3x - 1)$ satisfaz a igualdade a seguir.

$3 \cdot Q(x) = q(x)$

Dessa forma, $Q(x)$ é igual a um terço de $q(x)$.

Efetuando o dispositivo prático de Briot-Ruffini para $P(x)$ e $\left(x - \frac{1}{3}\right)$, tem-se que:

$\frac{1}{3}$	3	−13	7	11	6
2	3	−12	3	12	10

$q(x) = 3x^3 - 12x^2 + 3x + 12$

$3 \cdot Q(x) = q(x)$

$$Q(x) = \frac{1}{3} \cdot q(x)$$

$$Q(x) = \frac{1}{3} \cdot (3x^3 - 12x^2 + 3x + 12)$$

$Q(x) = x^3 - 4x^2 + x + 4$

O resto da divisão de $P(x)$ tanto por $\left(x - \frac{1}{3}\right)$ como por $(3x - 1)$ é igual a 10.

$Q(x) = x^3 - 4x^2 + x + 4$ e $r(x) = 10$

03.

Um polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ foi dividido por $d(x) = x - 3$, utilizando o método de Briot-Ruffini, conforme apresentado a seguir.

k	a	b	c	d
	5	1	11	48

O valor de $E = a + b + c + d - k$ é igual a:

a. 8
b. 11
c. 12
d. 13
e. 15

Resolução

k	a	b	c	d
	5	1	11	48

Como o divisor é $d(x) = x - 3$, tem-se que $k = 3$.
Substituindo no dispositivo de Briot-Ruffini, segue que:

3	a	b	c	d
	5	1	11	48

No disposto prático de Briot-Ruffini, vem que:
$5 = a$

$5 \cdot 3 + b = 1$
$b = -14$

$1 \cdot 3 + c = 11$
$c = 8$

$11 \cdot 3 + d = 48$
$d = 15$

$E = a + b + c + d - k$
$E = 5 + (-14) + 8 + 15 - 3$
$E = 11$

Alternativa correta: B

Habilidade

Efetuar a divisão de um polinômio utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini.

Exercícios **Extras**

04.

Dividindo-se o polinômio $P(x) = x^3 + tx^2 + 45x + s$ por $d(x) = x + 5$, utilizando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, encontrou-se o que segue.

–5	1	t	45	s
	n	–1	k	0

Assim, o valor de $\frac{s}{k} + n + t$ é igual a:

a. 10
b. 15
c. 35
d. 50
e. 75

05.

Divida o polinômio $P(x) = x^3 - 1$ pelo polinômio $d(x) = x + 1$, usando o método de Briot-Ruffini. Escreva o quociente e o resto da divisão.

EMI-16-190

Seu espaço

Sobre o módulo

Este módulo aborda a divisão de polinômios por divisores do 1º grau utilizando o dispositivo prático de Briot-Ruffini. Atenção: é comum praticar o método de Briot-Ruffini utilizando o divisor da forma $(x - a)$, embora também tenha sido discutida a aplicação do dispositivo para divisores da forma $(ax + b)$. Há exercícios desse tipo na aplicação e na tarefa.

Bom trabalho!

Exercícios **Propostos**

Da teoria, leia os tópicos 1.D e 1.D.1.

Exercícios de ◆ tarefa ⬟ reforço ⬢ aprofundamento

06.

Determine o quociente e o resto da divisão de $P(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ por $d(x) = x - 1$, usando o método de Briot-Ruffini.

07.

Determine o quociente e o resto da divisão de $P(x) = -2x^3 - 5x + 3$ por $D(x) = x - 3$, usando o método de Briot-Ruffini.

08.

Efetue a divisão de $P(x) = 4x^4 + 3x^2 + 8x + 8$ por $d(x) = 2x - 1$, fazendo uso do dispositivo prático de Briot-Ruffini. Escreva o quociente e o resto da divisão.

09.

Observe a divisão incompleta de $P(x) = x^4 + 5x^3 - 3x + 8$ por $d(x) = x - 1$, utilizando o método de Briot-Ruffini, sendo que um dos valores está representado pela letra k.

1	1	5	0	−3	8
	1	6	k		

Com base nessas informações, o valor de k é igual a:

a. 1
b. 2
c. 3
d. 5
e. 6

10. FURG-RS

Na divisão de um polinômio P(x) pelo binômio (x – a), ao usar o dispositivo prático de Briot-Ruffini, encontrou-se:

−2	1	p	−3	4	−5
	q	−4	5	r	7

Os valores de a, q, p e r são, respectivamente:

a. −2, 1, −6 e 6
b. −2, 1, −2 e −6
c. 2, −2, −2 e −6
d. 2, −2, 1 e 6
e. 2, 1, −4 e 4

11.

Determine o quociente e o resto da divisão de $P(x) = x^5 - 1$ por $D(x) = x + 1$, usando o método de Briot-Ruffini.

12.

Para a divisão de um polinômio P(x), de grau 3, por $d(x) = x - 1$, utilizou-se o dispositivo prático de Briot-Ruffini, conforme apresentado a seguir.

1	1	3	4	5
	1	4	8	13

Com base nessas informações, o quociente q(x) e o resto r(x), da divisão de P(x) por x – 1, são, respectivamente, iguais a:

a. $q(x) = x^3 + 4x^2 + 8x + 13$ e $r(x) = 0$
b. $q(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ e $r(x) = 13$
c. $q(x) = x^2 + 4x + 8$ e $r(x) = 5$
d. $q(x) = 4x^2 + 8x + 13$ e $r(x) = 5$
e. $q(x) = x^2 + 4x + 8$ e $r(x) = 13$

13.

O polinômio $P(x) = 3x^4 + 8x^3 + 6x + 12$ foi dividido por $d(x) = x + 1$, utilizando-se o processo prático de Briot-Ruffini. O processo usado está apresentado em:

a.

1	3	8	0	6	12
	3	11	11	17	29

b.

1	3	8	6	12
	3	11	17	29

c.

−1	3	8	6	12
	3	5	1	11

d.

−1	3	8	0	6	12
	−3	11	−11	17	29

e.

−1	3	8	0	6	12
	3	5	−5	11	1

14.

Determine o quociente e o resto da divisão de $P(x) = 3x^3 + x^2 + x + 1$ por $D(x) = x$, usando o método de Briot-Ruffini.

15.

Efetue a divisão de $P(x) = 4x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 7x + 1$ por $d(x) = 4x + 7$, fazendo uso do dispositivo prático de Briot-Ruffini. Escreva o quociente e o resto dessa divisão.

16.

Considere os polinômios

$P(x) = x^{102} + x^{101} + x^{100} + x^{99} + x^{98} + + x^{97} + x^{96} + ... + x^2 + x + 1$ e $d(x) = x + 1$.

Efetue a divisão de P(x) por d(x), utilizando o método de Briot-Ruffini, e determine o quociente e o resto da divisão.

Módulo 111

Divisão de polinômios: teorema do resto

Exercícios de **Aplicação**

01.

Considere o polinômio $P(x) = x^4 + x^3 + x + k$, em que k é uma constante real. Determine o valor de k para que a divisão de $P(x)$ por $d(x) = x - 1$ apresente resto igual a 6.

Resolução

O resto da divisão de $P(x)$ por $d(x) = x - 1$ é, segundo o teorema do resto, igual a $P(1)$ e o valor de $P(1)$, de acordo com o enunciado, é 6.

$P(1) = 6$

$P(1) = 1^4 + 1^3 + 1 + k$

$6 = 3 + k$

$k = 3$

O valor de k é 3.

02. Unicamp-SP

Considere o polinômio $p(x) = x^2 - 11x + k + 2$, em que x é variável real e k é um parâmetro fixo, também real.

a. Para qual valor do parâmetro k o resto do quociente de $p(x)$ por $x - 1$ é igual a 3?

b. Supondo, agora, $k = 4$, e sabendo que a e b são raízes de $p(x)$, calcule o valor de $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}+\frac{\pi}{b}\right)$.

Resolução

a. O resto da divisão de $p(x)$ por $x - 1$ é 3, logo:

$p(1) = r(1)$

$p(1) = 3$

$1^2 - 11 \cdot 1 + k + 2 = 3$

$k = 11$

O valor do parâmetro k é 11.

b. Se $k = 4$, temos:

$p(x) = x^2 - 11x + 6$

Sendo a e b as raízes de $p(x)$, temos:

$a + b = 11$

$a \cdot b = 6$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}+\frac{\pi}{b}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{b\pi+a\pi}{a\cdot b}\right)=$$

$$=\operatorname{sen}\left[\frac{\pi(a+b)}{a\cdot b}\right]=\operatorname{sen}\left[\frac{11\pi}{6}\right]=$$

$$=-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$$

Logo:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}+\frac{\pi}{b}\right)=-\frac{1}{2}$$

03. Fuvest-SP

Dividindo-se o polinômio $p(x)$ por $2x^2 - 3x + 1$, obtêm-se quociente $3x^2 + 1$ e resto $-x + 2$. Nessas condições, o resto da divisão de $p(x)$ por $x - 1$ é:

a. 2
b. 1
c. 0
d. −1
e. −2

Resolução

$$\begin{array}{r|l} p(x) & 2x2 - 3x + 1 \\ \hline -x + 2 & 3x^2 + 1 \end{array}$$

$p(x) = (2x^2 - 3x + 1) \cdot (3x^2 + 1) - x + 2$

O resto da divisão de $p(x)$ por $(x - 1)$, segundo o teorema do resto, é $p(1)$.

$p(1) = (2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1)\ Q\ (3 \cdot 1^2 + 1) - 1 + 2$

$p(1) = 1$

Alternativa correta: B

Habilidade

Efetuar operações entre polinômios.

Exercícios **Extras**

04. ITA-SP

A divisão de um polinômio f(x) por (x – 1) · (x – 2) tem resto x + 1. Se os restos das divisões de f(x) por x – 1 e x – 2 são, respectivamente, os números a e b, então $a^2 + b^2$ vale:

a. 13
b. 5
c. 2
d. 1
e. 0

05.

Um polinômio P(x) tem os seguintes valores numéricos: P(0) = 1, P(1) = 2, P(2) = 3, P(3) = 4 e P(4) = 5. Determine o resto da divisão de P(x) por d(x) = x – 4.

Seu espaço

Sobre o módulo

Este módulo apresenta o teorema do resto.

Comentar com os alunos que, ao dividir um polinômio P(x) por um d(x) do 1º grau, se não houver interesse no quociente, e sim no resto, esse teorema será, então, de grande utilidade.

Bom trabalho!

Da teoria, leia o tópico 1.E.

Exercícios de tarefa reforço aprofundamento

06. FGV-SP

Qual é o resto da divisão de
$P(x) = x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x + 1$ pelo binômio $x + 1$?

07. IFAL

Seja $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ um polinômio. O resto da divisão de $P(x)$ pelo binômio $B(x) = x - \frac{1}{2}$ é:

a. um número natural.
b. um número inteiro negativo.
c. um número racional positivo.
d. um número racional negativo.
e. um número irracional.

08. Unifesp

A divisão de um polinômio $p(x)$ por um polinômio $k(x)$ tem $q(x) = x^3 + 3x^2 + 5$ como quociente e $r(x) = x^2 + x + 7$ como resto. Sabendo-se que o resto da divisão de $k(x)$ por x é 2, o resto da divisão de $p(x)$ por x é:

a. 10
b. 12
c. 17
d. 25
e. 70

09.

O resto da divisão de um polinômio $P(x)$, de grau ≥ 2, por um polinômio $d(x) = x - 48$ é igual a:

a. $P(0)$
b. $P(47)$
c. $P(-47)$
d. $P(48)$
e. $P(-48)$

10.

O resto da divisão do polinômio $x^{12} + 16$ por $x + \sqrt[3]{2}$ é igual a:

a. $16\sqrt[3]{2}$
b. $8\sqrt[3]{2}$
c. 32
d. 16

11. Vunesp

Considere o polinômio $p(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$, em que b, c e d são constantes reais. A derivada de $p(x)$ é, por definição, o polinômio $p'(x) = 3x^2 + 2bx + c$. Se $p'(1) = 0$, $p'(-1) = 4$ e o resto da divisão de $p(x)$ por $x - 1$ é 2, então o polinômio $p(x)$ é:

a. $x^3 - x^2 + x + 1$
b. $x^3 - x^2 - x + 3$
c. $x^3 - x^2 - x - 3$
d. $x^3 - x^2 - 2x + 4$
e. $x^3 - x^2 - x + 2$

12. IFAL

Dividindo o polinômio $p(x)$ pelo polinômio $(x - 2)(x - 4)(x - 5)$, obtém-se resto $x + 3$. Se os restos das divisões de $p(x)$ por $x - 2$, $x - 4$ e $x - 5$ são, respectivamente, os números A, B e C, então $A \cdot B \cdot C$ vale:

a. 100
b. 180
c. 200
d. 280
e. 360

13. UEL-PR

O resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por $(x - 2)$ é 7 e o resto da divisão de $P(x)$ por $(x + 2)$ é -1. Desse modo, o resto da divisão de $P(x)$ por $(x - 2)(x + 2)$ é:

a. 6
b. 8
c. $7x - 1$
d. $2x + 3$
e. $3x + 2$

14.

Sendo $n > 1$ inteiro e $a \neq 0$, qual é o resto da divisão de $P(x) = x_n + a_n$ por $(x + a)$?

15. AFA-RJ

Sendo $P(x) = x + 3x^3 + 5x^5 + 7x^7 + 9x^9 + ... + 999x^{999}$, o resto da divisão de $P(x)$ por $(x - 1)$ é:

a. 249 500
b. 250 000
c. 250 500
d. 251 000

16. ITA-SP

A divisão de um polinômio $P(x)$ por $x^2 - x$ resulta no quociente $6x^2 + 5x + 3$ e no resto $-7x$.

O resto da divisão de $P(x)$ por $2x + 1$ é igual a:

a. 1
b. 2
c. 3
d. 4
e. 5

Módulo 112

Divisão de polinômios: teorema de D'Alembert

Exercícios de **Aplicação**

01.

Considere o polinômio $P(x) = -4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + k$. Determine o valor de k sabendo que P(x) é divisível por x + 1.

Resolução

Se P(x) é divisível por x + 1, então, pelo teorema de D'Alembert, $P(-1) = 0$.

$P(-1) = -4 \cdot (-1)^4 + 3 \cdot (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 + (-1) + k$

$0 = -4 - 3 + 2 - 1 + k$

Assim, k = 6.

02. UFMG

Considere o polinômio $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax + b$, em que a e b são números reais. Se f(x) + 1 é divisível por x + 1 e f(x) – 1 é divisível por x – 1, pode-se afirmar que os valores de a e b são, respectivamente:

a. 0 e 3
b. –2 e –3
c. –1 e –4
d. –1 e –2
e. 0 e –3

Resolução

$f(-1) + 1 = 0 \Rightarrow (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + a \cdot (-1) +$
$+ b + 1 = 0$

$-a + b = -3$

$f(1) - 1 = 0 \Rightarrow 1^3 + 3 \cdot 1^2 + a \cdot 1 + b - 1 = 0$

$a + b = -3$

Assim, a = 0 e b = –3.

Alternativa correta: E

03. FGV-SP

Se o polinômio $P(x) = x^3 - kx^2 + 6x - 1$ for divisível por (x – 1), ele também será divisível por:

a. $x^2 - 5x + 1$
b. $x^2 - 5x + 3$
c. $x^2 + 5x + 1$
d. $x^2 + 5x + 3$
e. $x^2 - 5x + 5$

Resolução

$p(1) = 0$

$1 - k + 6 - 1 = 0$

$k = 6$

$p(x) = x^3 - 6x^2 + 6x - 1$

1	1	–6	6	–1
	1	–5	1	0

$q(x) = x^2 - 5x + 1$

$\therefore p(x) = (x^2 - 5x + 1)(x - 1)$

Como $p(x) = (x^2 - 5x + 1)(x - 1)$, então são fatores $(x^2 - 5x + 1)$ e $(x - 1)$. Assim, p(x) também é divisível por $(x^2 - 5x + 1)$.

Alternativa correta: A

Habilidade

Resolver problemas utilizando o teorema do resto.

04. ITA-SP

Sabendo que o polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + 2x - 2$ é divisível por $(x + 1)$ e por $(x - 2)$, podemos afirmar que:

a. a e b são números inteiros de sinais opostos.
b. a e b são inteiros de sinais iguais.
c. a e b são racionais não inteiros de sinais opostos.
d. a e b são racionais não inteiros de mesmo sinal.
e. somente a é inteiro.

05.

Um polinômio P(x) tem os seguintes valores numéricos: $P(0) = 3$, $P(1) = 5$, $P(2) = 10$, $P(3) = 6$ e $P(5) = 0$. Com base nessas informações, pode-se afirmar que P(x) é divisível por:

a. x
b. $x - 1$
c. $x - 2$
d. $x - 3$
e. $x - 5$

Seu espaço

Sobre o módulo

Neste módulo, abordamos o teorema de D'Alembert, que pode ser explorado como uma situação particular do teorema do resto.

Esse teorema facilita o cálculo da divisão de polinômios por binômios na forma $(ax + b)$, $a \neq 0$, sem necessidade de resolver por completo a divisão para verificar se o resto é igual ou não a zero.

Bom trabalho!

Exercícios Propostos

Da teoria, leia o tópico 1.F.

Exercícios de tarefa reforço aprofundamento

06. UFRJ

O polinômio $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + d$, $d \in \mathbb{R}$, é divisível por $(x - 2)$. Determine d.

07. Unesp

O polinômio $P(x) = ax^3 + 2x + b$ é divisível por $x - 2$ e, quando divisível por $x + 3$, deixa resto -45. Nessas condições, os valores de a e b, respectivamente, são:

a. 1 e 4
b. 1 e 12
c. -1 e 12
d. 2 e 16
e. 1 e -12

08.

O polinômio $P(x) = ax^2 + bx + 15$ é divisível por $(x + 1)$ e também por $(x - 5)$. Determine os valores de a e b.

09. Unifor-CE

No polinômio $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + k$, o valor do número real k para que a divisão de f por $x + 3$ seja exata é:

a. -6
b. -5
c. 5
d. 6
e. 7

10.

O polinômio $P(x) = x^2 + 10x - k$ é divisível por $x - 6$. Determine o valor real de k.

11.

Um polinômio é divisível por $x + 10$, então pode-se afirmar que:

a. $P(-10) = -10$
b. $P(-10) = 0$
c. $P(0) = 10$
d. $P(10) = 0$
e. $P(10) = 10$

12.

Um polinômio P(x) é divisível por $(x - 1)$, por $(x - 4)$ e por $(x - 10)$. Com essas informações, pode-se afirmar que:

a. $P(0) = 0$, $P(1) = 1$ e $P(4) = 0$
b. $P(0) = 1$, $P(1) = 4$ e $P(4) = 10$
c. $P(-1) = 0$, $P(-4)$ e $P(-10) = 0$
d. $P(1) = 0$, $P(4) = 0$ e $P(10) = 0$
e. $P(1) = 1$, $P(4) = 4$ e $P(10) = 10$

13. Mackenzie-SP

$(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ é divisível por $x - 1$ e por $x + 1$. Quando dividido por $x - 2$, deixa resto igual a 12. Nessas condições, a, b e c valem:

a. -2, 1 e 2
b. 2, -1 e -2
c. 1, 2 e -2
d. 2, 1 e 1
e. 2, 2 e 1

14.

O polinômio $P(x) = x^2 - ax + b$ é divisível por x e, quando dividido por $x + 1$, deixa resto 1.

Nessas condições, determine o valor de $a + b$.

15.

O polinômio $P(x) = 4x^4 + 8x^2 - dx - e$ é divisível por $x - 1$. Nessas condições, qual é o valor da soma $d + e$?

16. Acafe-SC

"Dado um polinômio P(x), dizemos que ele é divisível por $x - a$, se $P(a) = 0$".

Com base nessa informação, identifique a opção correta:

a. $x^5 - 1$ é divisível por $x + 1$.
b. $x^5 + 32$ é divisível por $x - 2$.
c. $-x^5 + x^4 + 3x^3$ é divisível por $x + 1$.
d. $x^3 - 3x + 2$ é divisível por $x - 1$.
e. $x^3 - 2x^2 + x$ é divisível por $x + 1$.