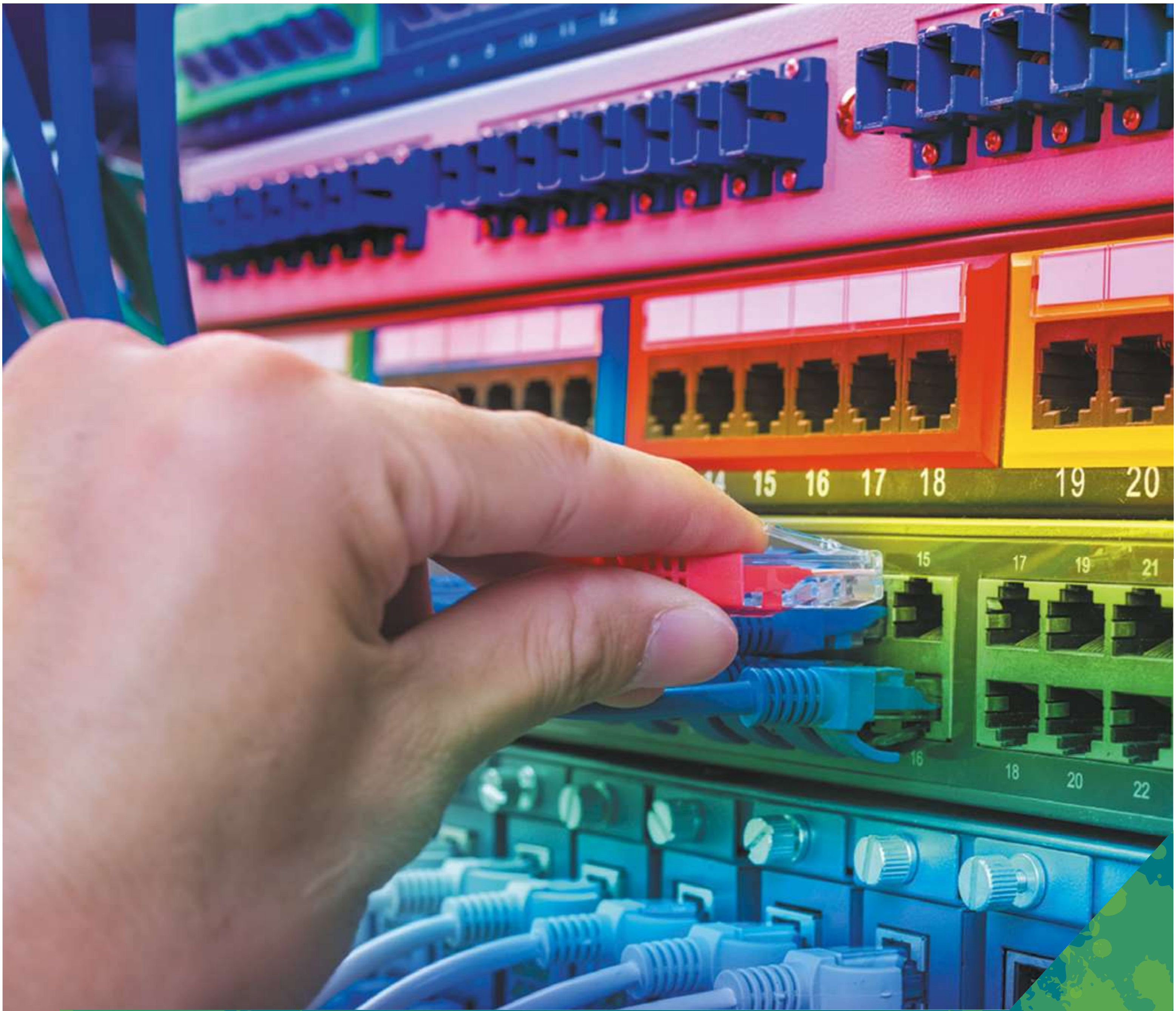
Matemática

111

112

113

MAT



JOHANNES WERNER

1 Potenciação e radiciação

Na computação, o byte é uma unidade de armazenamento de memória composto de 8 bits. Bit, que significa digito binário (0 ou 1), é a menor unidade de armazenamento de informação que pode ser transmitida a um computador. A **potenciação** é bastante útil ao retratar a capacidade de memória dos computadores. O SI (Sistema Internacional de Unidades) usa o kilobyte (1 kB = 10^3 bytes), o megabyte (1 MB = 10^6 bytes) , o gigabyte (1 GB = 10^9 bytes), terabyte (1 TB = 10^{12} bytes), chegando ao petabyte (1 PB = 10^{15} bytes). O sistema binário usa o kibibyte (1 KiB = 2^{10} bytes), o mébibyte (1 MiB = 2^{20} bytes) , o gibibyte (1 GiB = 2^{30} bytes) , tébibyte (1 TiB = 2^{40} bytes) chegando ao pébibyte (1 PiB = 2^{50} bytes).

1. Potenciação

A. Definições

Em todas as definições apresentadas a seguir, **a** representa um número real e **n**, um número natural diferente de zero.

1. Para **n** maior que 1, $\mathbf{a}^n$ é igual ao produto de n fatores idênticos a **a**, isto é:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{\text{n fatores idênticos}}$$

Notação

O elemento **a** é chamado **base**, **n** é denominado **expoente** e $\mathbf{a}^n$, **potência**.

2. Para n = 1, define-se: $a^1 = a$.
3. Para n = 0 e a ≠ 0, define-se: $a^0 = 1$.
4. Expoente inteiro e negativo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{com } a \neq 0$$

Exemplos

a. $10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100\,000$
b. $5^1 = 5$
c. $(-2)^0 = 1$
d. $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{81}$

B. Propriedades

Consideremos os números reais **a** e **b** e os números naturais **m** e **n**. Então, são válidas as seguintes propriedades:

- **P_1: produto de potências de mesma base**
Para multiplicar potências de mesma base, conservamos a base e somamos os expoentes.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Justificativa

$$\left.\begin{array}{l} a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ vezes}} \\ a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ vezes}} \end{array}\right\} a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ vezes}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ vezes}}$$

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{(m+n) \text{ vezes}}$$

Assim: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Exemplos

a. $10^5 \cdot 10^2 = 10^{5+2} = 10\,000\,000$
b. $(-10)^5 \cdot (-10)^2 = (-10)^{5+2} = -10\,000\,000$

- **P_2: quociente de potências de mesma base**
Para dividir potências de mesma base, conservamos a base e subtraímos os expoentes.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0$$

Justificativas

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ vezes}} \text{ e } a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ vezes}}$$

a. Sendo m > n, temos:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m \text{ vezes}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ vezes}}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{(m-n) \text{ vezes}} = a^{m-n}$$

b. Se m = n: $\frac{a^m}{a^n} = 1 = a^{(m-n)} = a^0 = 1$

c. Se m < n: $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{(n-m) \text{ vezes}}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{(n-m)} = a^{(m-n)}$

Exemplos

1. $\frac{5^7}{5^4} = 5^{7-4} = 5^3 = 125$

2. $\frac{2^3}{2^4} = 2^{3-4} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

3. $\frac{2^2}{2^x} = 2^{2-x}$

- **P_3: produto de potências de mesmo expoente**
Para multiplicar potências de mesmo expoente, conservamos o expoente e multiplicamos as bases.

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Justificativa

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ vezes}} \text{ e } b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ vezes}}$$

$$a^n \cdot b^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ vezes}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{ab \cdot ab \cdot ab \cdot \ldots \cdot ab}_{n \text{ vezes}}$$

Assim: $a^n \cdot b^n = (ab)^n$

Exemplos

$2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 3)^3 = 6^3$
$(a \cdot b \cdot c)^2 = a^2 \cdot b^2 \cdot c^2$

- **P_4: quociente de potências de mesmo expoente**
Para dividir potências de mesmo expoente, conservamos o expoente e dividimos as bases.

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, b \neq 0$$

Justificativa

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ vezes}} \text{ e } b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ vezes}}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ vezes}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ vezes}}}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a}{b}\right)}_{n \text{ vezes}}$$

Assim: $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Exemplos

a. $\frac{2^2}{11^2} = \left(\frac{2}{11}\right)^2$

b. $\frac{a^3}{b^3 \cdot c^3} = \left(\frac{a^3}{(b \cdot c)^3}\right) = \left(\frac{a}{b \cdot c}\right)^3$

- P_5: **potência de uma potência**
  Para elevar uma potência a um novo expoente, conservamos a base e multiplicamos os expoentes.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Justificativa

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ vezes}}$$

$$(a^m)^n = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ vezes}}} \Rightarrow (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Exemplos

a. $(2^5)^2 = 2^{5 \cdot 2} = 2^{10}$

b. $[(5^5)^2]^3 = 5^{5 \cdot 2 \cdot 3} = 5^{30}$

Observação

As propriedades apresentadas podem ser estendidas para os expoentes **m** e **n** inteiros.

Exemplos

a. $2^3 \cdot 2^{-2} = 2^{3+(-2)} = 2^1$ (P_1)

b. $\dfrac{5^2}{5^{-3}} = 5^{2-(-3)} = 5^{2+3} = 5^5$ (P_2)

c. $5^{-3} \cdot 2^{-3} = (5 \cdot 2)^{-3} = 10^{-3}$ (P_3)

d. $\dfrac{7^{-2}}{5^{-2}} = \left(\dfrac{7}{5}\right)^{-2}$ (P_4)

e. $(2^{-2})^{-3} = 2^{(-2)\cdot(-3)} = 2^6$

C. Situações especiais

1. $(-a)^n$ e $-a^n$

As potências $(-a)^n$ e $-a^n$, em geral, apresentam resultados diferentes, pois:

$$(-a)^n = \underbrace{(-a)\cdot(-a)\cdot(-a)\cdot\ldots\cdot(-a)}_{n \text{ vezes}}$$

$$-a^n = -\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ vezes}}$$

Exemplos

a. $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$

b. $-2^2 = -(2) \cdot (2) = -4$

2. $(a^m)^n$ e a^{m^n}

As potências $(a^m)^n$ e a^{m^n}, em geral, apresentam resultados diferentes, pois:

$$(a^m)^n = \underbrace{(a^m)\cdot(a^m)\cdot(a^m)\cdot\ldots\cdot(a^m)}_{n \text{ vezes}}$$

e

$$a^{m^n} = a^{\overbrace{m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}^{n \text{ vezes}}}$$

Exemplos

$2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64$

$2^{2^3} = 2^{2 \cdot 2 \cdot 2} = 2^8 = 256$

Arquimedes (287-212 a.C.)

A humanidade demorou milhares de anos para chegar da contagem simples até os cálculos de **potenciação**. Uma importante etapa desse percurso foi desenvolvida por **Arquimedes**, na Grécia Antiga. Esse matemático viveu no século III a.C. e trouxe importantes contribuições para a ciência, tanto no desenvolvimento teórico como no prático.

Em suas especulações, Arquimedes resolveu calcular quantos grãos de areia seriam necessários para encher o Universo. Essa questão parecia fundamental para Arquimedes. Em sua época, o Universo era considerado um sistema de esferas com o mesmo centro: o Sol. Os planetas estavam fixados na superfície de cada esfera.

Os expoentes

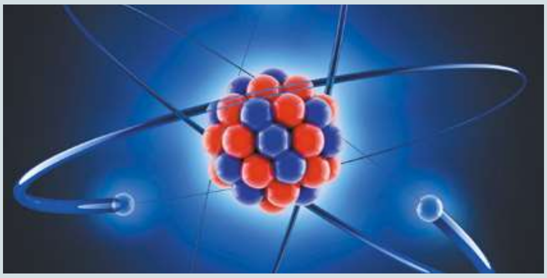
Após calcular o diâmetro dessas esferas, Arquimedes calculou o volume do Universo e o volume médio de um grão de areia. Fez a divisão final e obteve como resultado um número enorme. Não poderia usar os números usuais para escrever esse número, pois resultaria numa extensa e incompreensível quantidade de algarismos.

Nos cálculos de Arquimedes, apareciam sempre contas de multiplicar em que o número 10 repetia-se muitas vezes. Fazer contas com aqueles números enormes era muito difícil. Arquimedes construiu, então, uma tabela e elaborou um método de escrever números grandes, utilizando algarismos especiais, que ele chamou de "miríades" – e que hoje conhecemos como expoentes.

Em sua evolução, as potências tornaram-se de grande utilidade na representação de números "muito grandes" ou "muito pequenos" que aparecem quando nos referimos:

a. ao volume de água no nível máximo normal do reservatório do Rio Xingu, na Usina Hidrelétrica de Belo Monte, estimado em 2 510 000 000 m^3, ou seja, $2{,}51 \cdot 10^9$ m^3;

b. à massa de um próton, que é, por volta de, 0,00000000000000000000000000167 kg, ou seja, $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg.



PV2D-17-10

01. Ibmec-SP

Os astrônomos estimam que, no Universo visível, existem, aproximadamente, 100 bilhões de galáxias, cada uma com 100 bilhões de estrelas. De acordo com esses números, se cada estrela tiver, em média, 10 planetas a sua volta, então existem no universo visível, aproximadamente,

a. 10^{12} planetas.
b. 10^{17} planetas.
c. 10^{23} planetas.
d. 10^{121} planetas.
e. 10^{220} planetas.

Resolução

100 bilhões de galáxias: $10^2 \cdot 10^9 = 10^{11}$ galáxias
100 bilhões de estrelas: $10^2 \cdot 10^9 = 10^{11}$ estrelas em cada galáxia
Logo, temos:
(nº de galáxias) · (nº estrelas/galáxias) =
$= 10^{11}$ galáxias · 10^{11} estrelas em cada galáxia =
$= 10^{22}$ estrelas
Cada estrela tem, em média, 10 planetas.
Assim:
(nº de estrelas) · (nº de planetas/estrelas) =
$= 10^{22} \cdot 10 = 10^{23}$ planetas.
Alternativa correta: C

02. PASUSP

As células da bactéria *Escherichia coli* têm formato cilíndrico, com $8 \cdot 10^{-7}$ metros de diâmetro. O diâmetro de um fio de cabelo é de, aproximadamente, $1 \cdot 10^{-4}$ metros. Dividindo-se o diâmetro de um fio de cabelo pelo diâmetro de uma célula de *Escherichia coli*, obtém-se, como resultado,

a. 125
b. 250
c. 500
d. 1 000
e. 8 000

Resolução

Diâmetro de um fio de cabelo: $d_f = 1 \cdot 10^{-4}$ m
Diâmetro de uma célula de *Escherichia coli*:
$d_c = 8 \cdot 10^{-7}$ m
Logo:

$$\frac{d_f}{d_c} = \frac{1 \cdot 10^{-4}}{8 \cdot 10^{-7}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{10^{-4}}{10^{-7}} = \frac{1}{8} \cdot 10^{-4-(-7)} =$$
$$= 0{,}125 \cdot 10^3 = 125$$

Alternativa correta: A

03. UTFPR

Andando pela praia, Zezinho encontrou uma garrafa fechada com uma mensagem dentro. Na mensagem estava escrito:

> O tesouro foi enterrado na rua Frederico Lamas, a 6 m do portão da casa cujo número é o expoente da potência obtida transformando-se a expressão
>
> $$\frac{\left(2^{25} \cdot 8^{12}\right)^{100} \cdot \left(3^{150}\right)^{40} \cdot 9^{50}}{4^2 \cdot 81}$$
>
> numa só potência de base igual à distância do portão à posição em que foi enterrado o tesouro.

Imediatamente Zezinho, que conhecia muito bem a referida rua, recorreu aos seus conhecimentos aritméticos e, calculando corretamente, concluiu que o número da casa era

a. 782
b. 1 525
c. 3 247
d. 6 096
e. 6 100

Resolução

$$\frac{\left(2^{25} \cdot 8^{12}\right)^{100} \cdot \left(3^{150}\right)^{40} \cdot 9^{50}}{4^2 \cdot 81} =$$
$$= \frac{\left(2^{25} \cdot \left(2^3\right)^{12}\right)^{100} \cdot \left(3^{150}\right)^{40} \cdot \left(3^2\right)^{50}}{\left(2^2\right)^2 \cdot 3^4} =$$
$$= \frac{\left(2^{25} \cdot 2^{36}\right)^{100} \cdot 3^{6\,000} \cdot 3^{100}}{2^4 \cdot 3^4} =$$
$$= \frac{\left(2^{61}\right)^{100} \cdot 3^{6\,100}}{2^4 \cdot 3^4} = \frac{2^{6\,100}}{2^4} \cdot \frac{3^{6\,100}}{3^4} =$$
$$= 2^{6\,096} \cdot 3^{6\,096} = (2 \cdot 3)^{6\,096} = 6^{6\,096}$$

Alternativa correta: D

04. Fatec-SP

> Um atossegundo é uma unidade de tempo que representa um bilionésimo de um bilionésimo de segundo. Um femtossegundo é também uma unidade de tempo que representa um milionésimo de um bilionésimo de segundo. Sabe-se que o processo que permite a visão depende da interação da luz com pigmentos da retina e leva cerca de 200 femtossegundos para ocorrer.

Disponível em: <http://tinyurl.com/ov3ur4z> Acesso em: 17 set. 2015. Adaptado

Dessa forma, o tempo em que a luz interage com os pigmentos da retina, em atossegundos, é igual a

a. 2 000
b. 20 000
c. 200 000
d. 2 000 000
e. 20 000 000

Resolução

Como:
1 milionésimo $= 10^{-6}$ e 1 bilionésimo $= 10^{-9}$, temos:
1 atossegundo $= 10^{-9} \cdot 10^{-9}$ segundo
1 femtossegundo $= 10^{-6} \cdot 10^{-9}$ segundo =
$= 10^3 \cdot 10^{-9} \cdot 10^{-9}$ segundo
1 femtossegundo $= 10^3 \cdot 1$ atossegundos
Assim:
200 femtossegundos $= 200 \cdot 10^3$ atossegundos =
= 200 000 atossegundos
Alternativa correta: C

05. Enem

Dados divulgados pelo Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais mostraram o processo de devastação sofrido pela Região Amazônica entre agosto de 1999 e agosto de 2000. Analisando fotos de satélites, os especialistas concluíram que, nesse período, sumiu do mapa um total de 20 000

PV2D-17-10

quilômetros quadrados de floresta. Um órgão de imprensa noticiou o fato com o seguinte texto:

> O assustador ritmo de destruição é de um campo de futebol a cada oito segundos.

Considerando que um ano tem, aproximadamente, $32 \cdot 10^6$ s (trinta e dois milhões de segundos) e que a medida da área oficial de um campo de futebol é, aproximadamente, 10^{-2} km² (um centésimo de quilômetro quadrado), as informações apresentadas nessa notícia permitem concluir que tal ritmo de desmatamento, em um ano, implica a destruição de uma área de

a. 10 000 km², e a comparação dá a ideia de que a devastação não é tão grave quanto o dado numérico nos indica.
b. 10 000 km², e a comparação dá a ideia de que a devastação é mais grave do que o dado numérico nos indica.
c. 20 000 km², e a comparação retrata exatamente o ritmo da destruição.
d. 40 000 km², e o autor da notícia exagerou na comparação, dando a falsa impressão de gravidade a um fenômeno natural.
e. 40 000 km², e, ao chamar a atenção para um fato realmente grave, o autor da notícia exagerou na comparação.

Resolução

Do enunciado, temos:

Um campo ________ 8 s
x campos ________ $32 \cdot 10^6$ s

$$x = \frac{32 \cdot 10^6}{8} = 4 \cdot 10^6 \text{ campos}$$

Um campo ________ 10^{-2} km²
$4 \cdot 10^6$ campos ________ y km²
$y = 4 \cdot 10^6 \cdot 10^{-2} = 40\,000$ km²

Portanto, o autor da notícia exagerou na comparação.
Alternativa correta: E

2. Radiciação

Do latim, *radix*, que significa raiz, origina o termo **radical**.

A introdução do símbolo $\sqrt{}$ para raízes deve-se ao matemático Christoff Rudolff ao publicar, em 1525, *Die coss*, sua obra sobre álgebra.

Acredita-se que o símbolo $\sqrt{}$ tenha surgido em razão do uso da letra "r", a primeira da palavra *radix*, em sua forma cursiva para representar raízes.

Assim, de "raiz de 2" abreviada para "r2" e da semelhança com a letra r minúscula em gótico (Υ) adequadamente alongada chega-se à representação $\sqrt{2}$.

A. Definições

1. Considere **a** um número real não negativo e **n** um número natural diferente de zero.

O símbolo $\sqrt[n]{a}$ representa um número real **b**, não negativo, que satisfaz a igualdade $b^n = a$.

Notação

O número **a** é chamado **radicando**, **n** é denominado **índice** da raiz, $\sqrt{}$ é o radical e $\sqrt[n]{a}$ é a **raiz n-ésima de a**.

Observação

O símbolo $\sqrt{a}$ representa o mesmo que $\sqrt[2]{a}$.

Exemplos

a. $\sqrt{25} = 5$, pois $5^2 = 25$ (raiz quadrada de 25)
b. $\sqrt[1]{2} = 2$, pois $2^1 = 2$ (raiz primeira de 2)
c. $\sqrt[3]{0} = 0$, pois $0^3 = 0$ (raiz cúbica de zero)

2. Considere **a** um número real e **n** um número natural ímpar.

O símbolo $\sqrt[n]{a}$ representa um número real b que satisfaz a igualdade $b^n = a$.

Exemplos

a. $\sqrt[3]{8} = 2$, pois $2^3 = 8$
b. $\sqrt[3]{-8} = -2$, pois $(-2)^3 = -8$

B. Raiz quadrada do quadrado de um número real

$\sqrt{a^2} = a$, se a for um número real não negativo.

$\sqrt{a^2} = -a$, se a for um número real negativo.

Costuma-se indicar: $\sqrt{a^2} = |a|$ (valor absoluto de a).

Exemplos

a. $\sqrt{5^2} = 5$

b. $\sqrt{(-5)^2} = -(-5) = 5$

c. $\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2} = 2-\sqrt{3}$, pois $2-\sqrt{3} > 0$

d. $\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2} = -\left(2-\sqrt{5}\right) = \sqrt{5}-2$, pois $2-\sqrt{5} < 0$

Observação

Não devemos confundir $\sqrt{4} = 2$ com $\sqrt{4} = \pm 2$, pois é falso, de acordo com a definição.

Então, $2 = \sqrt{4}$ e $-2 = -\sqrt{4}$.

Se considerarmos a equação $x^2 = 4$, teremos como solução as raízes 2 e –2, pois:

$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2$

C. Potências com expoente racional

Definição

$a^{\frac{n}{k}} = \sqrt[k]{a^n}$, com a > 0, n inteiro e k inteiro positivo.

Exemplo

$5^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{5^1} = \sqrt{5}$

PV2D-17-10

Observação

Todas as propriedades apresentadas para potências de expoentes inteiros são válidas para expoentes racionais.

D. Propriedades

Consideraremos os números reais a e b não negativos e os números naturais não nulos m, n e p. Então:

- **P_1: produto de radicais de mesmo índice**
  Para multiplicarmos radicais com o mesmo índice, conservamos o índice e multiplicamos os radicandos:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

Justificativa

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}}=(a\cdot b)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a\cdot b}$$

Exemplos

a. $\sqrt[3]{10^2}\cdot\sqrt[3]{10}=\sqrt[3]{10^2\cdot 10^1}=\sqrt[3]{10^3}=10$

b. $\sqrt{2\cdot 64}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{64}=\sqrt{2}\cdot 8=8\sqrt{2}$

- **P_2: divisão de radicais de mesmo índice**
  Para dividir radicais com o mesmo índice, conservamos o índice e dividimos os radicandos.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\ (b\neq 0)$$

Justificativa

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Exemplos

a. $\frac{\sqrt[5]{128}}{\sqrt[5]{4}}=\sqrt[5]{\frac{128}{4}}=\sqrt[5]{32}=2$

b. $\sqrt{\frac{4}{25}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}}=\frac{2}{5}=0,4$

- **P_3: potência de uma raiz**
  Para elevar uma raiz a um expoente, basta elevarmos o radicando a esse expoente.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$$

Justificativa

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

Observação

A propriedade P_3 também é válida quando o expoente m é inteiro negativo.

Exemplos

a. $\left(\sqrt{5}\right)^2=\sqrt{5^2}=5$

b. $\left(\sqrt[3]{2}\right)^2=\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[3]{4}$

- **P_4: raiz da outra raiz**
  Para obter a raiz de uma outra raiz, basta conservarmos o radicando e multiplicarmos os índices:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$$

Justificativa

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n]{a^{\frac{1}{m}}}=a^{\frac{\left(\frac{1}{m}\right)}{n}}=a^{\frac{1}{n\cdot m}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$$

Exemplos

a. $\sqrt{\sqrt[4]{\sqrt[5]{7}}}=\sqrt[2\cdot 4\cdot 5]{7}=\sqrt[40]{7}$

b. $\sqrt{\sqrt{3}}=\sqrt[2\cdot 2]{3}=\sqrt[4]{3}$

- **P_5: simplificação de radicais**
  Quando multiplicamos ou dividimos o índice de uma raiz e o expoente de seu radicando por um mesmo número natural não nulo, o valor da raiz não se altera.

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}}\ (p\neq 0)$$

Justificativa

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m\cdot p}{n\cdot p}}=\sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}}$$

Exemplos

a. $\sqrt{5^3}=\sqrt[2\cdot 4]{5^{3\cdot 4}}=\sqrt[8]{5^{12}}$

b. $\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[3\cdot 2]{2^{1\cdot 2}}=\sqrt[3]{2^1}=\sqrt[3]{2}$

Observação

Como podemos observar nos exemplos, o valor de uma raiz não se altera quando dividimos o índice do radical e o expoente do radicando por um fator comum natural não nulo.

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n:p]{a^{m:p}}$$

Exemplos

a. $\sqrt[6]{10^4}=\sqrt[6:2]{10^{4:2}}=\sqrt[3]{10^2}$

b. $\sqrt[8]{2^{20}}=\sqrt[8:4]{2^{20:4}}=\sqrt{2^5}$

c. $\sqrt[8]{5^4}=\sqrt[8:4]{5^{4:4}}=\sqrt[2]{5^1}=\sqrt{5}$

E. Simplificação de radicais

Simplificar um radical significa transformá-lo em uma expressão equivalente ao radical dado, porém escrita de forma mais simples. Obtemos essa transformação por meio da aplicação das propriedades anteriormente vistas.

Exemplos

a. $\sqrt[3]{81\cdot x^5\cdot y^7\cdot z^3}=\sqrt[3]{3^4\cdot x^5\cdot y^7\cdot z^3}=$

$=\sqrt[3]{3^3\cdot 3\cdot x^3\cdot x^2\cdot y^6\cdot y\cdot z^3}=$

$=\sqrt[3]{3^3}\cdot\sqrt[3]{x^3}\cdot\sqrt[3]{y^6}\cdot\sqrt[3]{z^3}\cdot\sqrt[3]{3\cdot x^2 y}=$

$=3\cdot x\cdot y^2\cdot z\cdot\sqrt[3]{3x^2y}$

b. $\sqrt[5]{a^2\cdot b^6\cdot c}=\sqrt[5]{a^2\cdot b^5\cdot b\cdot c}=b\sqrt[5]{a^2bc}$

PV2D-17-10

c. $\sqrt[3]{324} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 3^4} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 3^3 \cdot 3} =$
$= 3\sqrt[3]{2^2 \cdot 3} = 3\sqrt[3]{12}$

F. Redução de radicais ao mesmo índice

Para reduzir dois ou mais radicais a um mesmo índice, inicialmente calculamos o MMC de todos os índices, obtendo, assim, o índice comum a todos os radicais. Em seguida, dividimos o novo índice por todos os índices anteriores, multiplicando o resultado pelos expoentes dos fatores do respectivo radicando.

Exemplos

a. $\sqrt[3]{xy^2}$; $\sqrt[4]{x^3}$ e $\sqrt{y}$

MMC (3, 4, 2) = 12, então:

$\sqrt[3]{xy^2} = \sqrt[12]{x^4y^8}$; $\sqrt[4]{x^3} = \sqrt[12]{x^9}$; $\sqrt{y} = \sqrt[12]{y^6}$

b. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$ e $\sqrt[4]{5}$

MMC (2, 3, 4) = 12, então:

$\sqrt{2} = \sqrt[12]{2^6}$; $\sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4}$; $\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3}$

Observações

a. Conforme vimos nas propriedades $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$, a multiplicação e a divisão de raízes só devem ser efetuadas se os radicais tiverem índices iguais, então esta propriedade, que permite reduzir os radicais ao mesmo índice, é bastante importante nesses casos.

Exemplo

$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{5^4} \cdot \sqrt[12]{2^6} \cdot \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{5^4 \cdot 2^6 \cdot 3^3}$

b. Para comparar raízes, também devemos tê-las com os índices iguais, e a maior raiz será aquela que tiver o maior radicando.

Exemplos

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt[3]{2} = \sqrt[3\cdot 2]{2^{1\cdot 2}} = \sqrt[6]{4} \\ \sqrt{3} = \sqrt[2\cdot 3]{3^{1\cdot 3}} = \sqrt[6]{3^3} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{3} > \sqrt[3]{2}$$

G. Racionalização de denominadores

Racionalizar o denominador de uma fração significa transformá-lo em outra fração sem radicais irracionais no denominador, a fim de facilitar o cálculo da divisão. Em termos práticos, racionalizar o denominador significa eliminar o radical do denominador.

A racionalização pode ser feita multiplicando-se o numerador e o denominador da fração por um mesmo fator, obtendo, assim, uma fração equivalente à anterior.

Esse fator é chamado fator de racionalização ou fator racionalizante.

1º caso: denominadores do tipo $\sqrt[n]{a^m}$

Observamos que:

$\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^{n-m}} = \sqrt[n]{a^m \cdot a^{n-m}} =$
$= \sqrt[n]{a^{m+n-m}} = \sqrt[n]{a^n} = a$

Assim, nas frações que apresentam denominador do tipo $\sqrt[n]{a^m}$, basta multiplicar o seu numerador e o seu denominador por $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ (fator racionalizante) para eliminar o radical (número irracional) do denominador.

Exemplos

Racionalizar os denominadores:

a. $\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{1 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

b. $\dfrac{2}{\sqrt[3]{4}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[3]{2}} = \dfrac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{2\sqrt[3]{2}}{2} = \sqrt[3]{2}$

Notemos que, se no denominador aparecer uma **raiz quadrada**, o fator racionalizante será outra raiz quadrada igual à existente no denominador da fração.

2º caso: denominadores do tipo $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$

Nesse caso, vamos relembrar o produto notável:

$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$

Notamos que este produto notável, aplicado aos denominadores desse caso, produz resultado racional, ou seja.

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = \left(\sqrt{a}\right)^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2 = a - b$$

Portanto, se tivermos de racionalizar denominadores do tipo $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, basta multiplicar o numerador e o denominador da fração pelo conjugado do denominador, eliminando assim o radical (número irracional) do denominador.

Assim:

denominador: $\sqrt{a} + \sqrt{b} \rightarrow$ conjugado: $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

denominador: $\sqrt{a} - \sqrt{b} \rightarrow$ conjugado: $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

Exemplos

a. $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \dfrac{1\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)} = \dfrac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{3-2} =$
$= \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

b. $\dfrac{\sqrt{2}}{6\sqrt{2}+1} = \dfrac{\sqrt{2}\left(6\sqrt{2}-1\right)}{\left(6\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(6\sqrt{2}-1\right)} = \dfrac{\left(6\cdot 2-\sqrt{2}\right)}{36\cdot 2-1} =$
$= \dfrac{12-\sqrt{2}}{71}$

A racionalização de denominadores permite fazer divisões com erros menores. Por exemplo, na fração $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ temos a divisão de 1 por $\sqrt{5}$, ou seja, $\dfrac{1}{2{,}2360679774...}$. Como o denominador é um decimal infinito e não periódico, fica difícil saber qual é a melhor aproximação a ser usada para $\sqrt{5}$. Ao utilizar a fração equivalente $5\frac{\sqrt[3]{5}}{5}$, não só teremos o trabalho facilitado como também conseguiremos uma melhor aproximação para o resultado da operação.

Enfatizamos aqui um caso especial de racionalização, aquele que se relaciona com a fatoração da soma ou a subtração de cubos, apresentada a seguir.

$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - a \cdot b + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + a \cdot b + b^2)$

Para racionalizar o denominador da fração

$\dfrac{4}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}}$, multiplicam-se o denominador e o numerador dessa fração por $\sqrt[3]{5^2} - \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2}$. Efetuando-se as operações indicadas, obtém-se:

$$\frac{4}{\left(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}\right)}=\frac{4\left(\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}\right)}=$$

$$=\frac{4\left(\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}\right)}{\sqrt[3]{5^3}+\sqrt[3]{2^3}}=\frac{4\left(\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}\right)}{5+2}=\frac{4\left(\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}\right)}{7}$$

APRENDER SEMPRE

29

01. Unifor-CE

A expressão $\sqrt{18}+\sqrt{50}$ é equivalente a

a. $2\sqrt{17}$

b. $34\sqrt{2}$

c. $8\sqrt{2}$

d. $5\sqrt{3}$

e. $2\sqrt{2}$

Resolução

Fatorando os radicandos, temos:

18	2
9	3
3	3
1	

50	2
25	5
5	5
1	

Assim, segue:

$\sqrt{18}+\sqrt{50}=\sqrt{3^2\cdot 2}+\sqrt{5^2\cdot 2}=$

$\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{5^2}\cdot\sqrt{2}=3\sqrt{2}+5\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

Alternativa correta: C

02. IFAL

Assinale a alternativa correta.

a. $\sqrt{4}+\sqrt{5}=\sqrt{9}=3$

b. $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2=3+2=5$

c. $\dfrac{9}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

d. $\dfrac{4}{\left(\sqrt{5}-1\right)}=\sqrt{5}+1$

e. $\sqrt{16}=\pm 4$

Resolução

a. Incorreta, pois $\sqrt{4}+\sqrt{5}>3$

b. Incorreta, pois $\left(\sqrt{4}+\sqrt{5}\right)2=$

$=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2=$

$=5+2\sqrt{6}$

c. Incorreta, pois $\dfrac{9}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}$

d. Correta, pois $\dfrac{4}{\left(\sqrt{5}-1\right)}\cdot\dfrac{\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}+1\right)}=\sqrt{5}+1$

e. Incorreta, pois $\sqrt{16}=4$

Alternativa correta: D

03. CPCAR -MG

Ao resolver a expressão numérica

$$\left[\sqrt[3]{\frac{\left(25\cdot 10^{-6}\right)\cdot 0{,}000075}{10}}\right]:\left[\frac{5\sqrt[3]{1{,}5}}{10^4}\right]\cdot\left(-0{,}0010\right)^0,$$

o valor encontrado é

a. $\sqrt[3]{2}$

b. $\sqrt[3]{3}$

c. 1

d. 0,1

Resolução

$$\left[\sqrt[3]{\frac{\left(25\cdot 10^{-6}\right)\cdot 0{,}000075}{10}}\right]:\left[\frac{5\sqrt[3]{1{,}5}}{10^4}\right]\cdot\left(-0{,}0010\right)^0=$$

$$=\left[\sqrt[3]{\frac{5^2\cdot 10^{-6}\cdot 75\cdot 10^{-6}}{10}}\right]:\left[5\cdot 10^{-4}\cdot\sqrt[3]{\frac{15}{10}}\right]\cdot 1=$$

$$=\left[\sqrt[3]{\frac{5^{\cancel{2}}\cdot 5^2\cdot 3\cdot 10^{-12}}{2\cdot 5}}\right]:\left[5\cdot 10^{-4}\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right]=$$

$$=\left[5\cdot 10^{-4}\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right]:\left[5\cdot 10^{-4}\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right]=1$$

Alternativa correta: C

04.

Racionalize os denominadores e simplifique, se possível, as frações.

a. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

b. $\dfrac{14}{\sqrt{7}}$

c. $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$

d. $\dfrac{4}{\sqrt[4]{4}}$

e. $\dfrac{3+\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}}$

Resolução

a. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

b. $\dfrac{14}{\sqrt{7}}\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=\dfrac{14\sqrt{7}}{7}=2\sqrt{7}$

c. $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$

d. $\dfrac{4}{\sqrt[4]{4}}\cdot\dfrac{\sqrt[4]{4^3}}{\sqrt[4]{4^3}}=\dfrac{4\sqrt[4]{4^3}}{4}=\sqrt[4]{2^6}=\sqrt{2^3}=2\sqrt{2}$

e. $\dfrac{(3+\sqrt{7})}{(3-\sqrt{7})}\cdot\dfrac{(3+\sqrt{7})}{(3+\sqrt{7})}=\dfrac{9+6\sqrt{7}+7}{9-7}=8+3\sqrt{7}$

05. UFMG (adaptado)

A expressão $\dfrac{a^{-\frac{1}{9}}\cdot\left(a^{-\frac{1}{3}}\right)^2}{-a^2}:\left(-\dfrac{1}{a}\right)^2$, com $a\neq 0$, é equivalente a

a. $\sqrt[9]{-a^5}$

b. $\sqrt[9]{a^5}$

c. $\sqrt[9]{-a^7}$

d. $\sqrt[9]{a^7}$

e. $-\dfrac{\sqrt[9]{a^2}}{a}$

Resolução

$\dfrac{a^{-\frac{1}{9}}\cdot\left(a^{-\frac{1}{3}}\right)^2}{-a^2}:\left(-\dfrac{1}{a}\right)^2=\dfrac{a^{-\frac{1}{9}}\cdot a^{-\frac{2}{3}}}{-a^2}:\dfrac{1}{a^2}$

$=\dfrac{a^{-\frac{1}{9}-\frac{2}{3}}}{-\cancel{a^2}}\cdot\dfrac{\cancel{a^2}}{1}=\dfrac{a^{\frac{-1-6}{9}}}{(-1)}=$

$=a^{-\frac{7}{9}}=-\dfrac{1}{a^{\frac{7}{9}}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt[9]{a^7}}\cdot\dfrac{\sqrt[9]{a^2}}{\sqrt[9]{a^2}}=-\dfrac{\sqrt[9]{a^2}}{a}$

Alternativa correta: E

PV2D-17-10

Módulo 1

Potenciação

https://coc.pear.sn/2N8UPwM

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

ROTEIRO DE ESTUDOS									
Leia com atenção		Capítulo 1 – Tópicos 1.A, 1.B e 1.C.							
Exercícios	Série branca	01	02	04	05	06	09	10	12
	Série amarela	02	04	06	07	08	10	12	15
	Série roxa	12	13	14	15	16	18	19	20
	Foco Enem	04	05	08	09	10	11	14	15

01. UFRGS-RS

Por qual potência de 10 deve ser multiplicado o número $10^{-3} \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3}$ para que esse produto seja igual a 10?

a. 10^{9}
b. 10^{10}
c. 10^{11}
d. 10^{12}
e. 10^{13}

02. Cefet-MG

Sendo $y = \dfrac{4^{10} \cdot 8^{-3} \cdot 16^{-2}}{32}$ a metade do valor de y vale

a. 2^{-3}
b. 2^{-4}
c. 2^{-5}
d. 2^{-6}

03. IFSP

A quinoa tem origem nos Andes e é um alimento rico em ferro, fósforo, cálcio, vitaminas B1, B2 e B3 e ainda contém as vitaminas C e E. Admitindo que a quinoa seja vendida em sacas de 25 kg, que contêm, cada uma, cerca de 10^{7} grãos, então a massa de um grão de quinoa é, em gramas, aproximadamente,

a. $2{,}5 \cdot 10^{-6}$
b. $2{,}5 \cdot 10^{-3}$
c. $2{,}5 \cdot 10^{0}$
d. $2{,}5 \cdot 10^{1}$
e. $2{,}5 \cdot 10^{2}$

04. Enem C1-H3

As exportações de soja do Brasil totalizaram 4,129 milhões de toneladas no mês de julho de 2012, e registraram um aumento em relação ao mês de julho de 2011, embora tenha havido uma baixa em relação ao mês de maio de 2012.

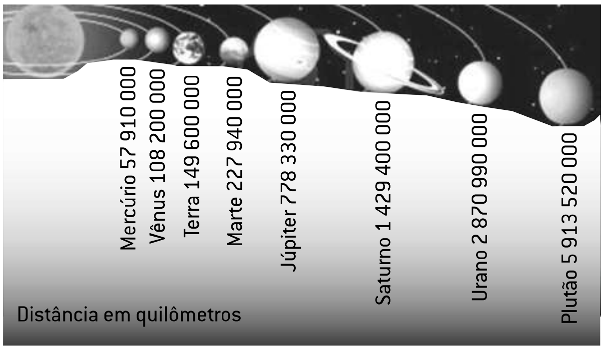
Disponível em: <www.noticiasagricolas.com.br>. Acesso em: 2 ago. 2012.

A quantidade, em quilogramas, de soja exportada pelo Brasil no mês de julho de 2012 foi de

a. $4{,}129 \cdot 10^{3}$
b. $4{,}129 \cdot 10^{6}$
c. $4{,}129 \cdot 10^{9}$
d. $4{,}129 \cdot 10^{12}$
e. $4{,}129 \cdot 10^{15}$

05. UEMA

Os planetas do Sistema Solar, do qual nosso planeta Terra faz parte, realizam órbitas em torno do Sol, mantendo determinada distância, conforme mostra a figura a seguir.



Disponível em: <http://webciencia.com>. Acesso em: 27 ago. 2014. Adaptado

O valor, em metros, da distância da Terra ao Sol em potência é

a. $14{,}96 \cdot 10^{-11}$
b. $1{,}496 \cdot 10^{10}$
c. $14{,}96 \cdot 10^{-10}$
d. $1{,}496 \cdot 10^{11}$
e. $14{,}96 \cdot 10^{11}$

06. Cefet-MG

O valor da expressão numérica $\dfrac{(1{,}25)^{-2} + 4 \cdot 5^{-1}}{(0{,}999...)^{2} - 2(-10)^{-1}}$ é igual a

a. $\dfrac{3}{5}$
b. $\dfrac{4}{5}$
c. $\dfrac{6}{5}$
d. $\dfrac{7}{5}$

07. IFSP

O valor da expressão $\dfrac{2^{-2} - 2^{-3}}{2^{2}}$ é igual a

a. $\dfrac{1-2^{5}}{2^{4}}$
b. 2^{-3}
c. -2^{-5}
d. 2^{-5}
e. $\dfrac{2^{5}-1}{2^{4}}$

PV2D-17-10

08. Enem C1-H1

A cor de uma estrela tem relação com a temperatura em sua superfície. Estrelas não muito quentes (cerca de 3 000 K) nos parecem avermelhadas. Já as estrelas amarelas, como o Sol, possuem temperatura em torno dos 6 000 K; as mais quentes são brancas ou azuis porque sua temperatura fica acima dos 10 000 K.

A tabela apresenta uma classificação espectral e outros dados para as estrelas dessas classes.

Estrelas da sequência principal				
Classe Espectral	Temperatura	Luminosidade	Massa	Raio
O5	40 000	$5 \cdot 10^5$	40	18
B0	28 000	$2 \cdot 10^4$	18	7
A0	9 900	80	3	2,5
G2	5 770	1	1	1
M0	3 480	0,06	0,5	0,6

Temperatura em Kelvin, luminosidade, massa e raio, tomando o Sol como unidade.

Disponível em: <http://www.zenite.nu>. Acesso em: 1 maio 2010. Adaptado.

Se tomarmos uma estrela que tenha temperatura 5 vezes maior que a temperatura do Sol, qual será a ordem de grandeza de sua luminosidade?

- **a.** 20 000 vezes a luminosidade do Sol
- **b.** 28 000 vezes a luminosidade do Sol
- **c.** 28 850 vezes a luminosidade do Sol
- **d.** 30 000 vezes a luminosidade do Sol
- **e.** 50 000 vezes a luminosidade do Sol

09. UFRGS-RS

Considere que o corpo de uma determinada pessoa contenha 5,5 litros de sangue e 5 milhões de glóbulos vermelhos por milímetro cúbico de sangue.

Com base nesses dados, é correto afirmar que o número de glóbulos vermelhos no corpo dessa pessoa é

- **a.** $2{,}75 \cdot 10^9$
- **b.** $5{,}5 \cdot 10^{10}$
- **c.** $5 \cdot 10^{11}$
- **d.** $5{,}5 \cdot 10^{12}$
- **e.** $2{,}75 \cdot 10^{13}$

10. UFG-GO

Uma empresa recebeu uma planilha impressa com números inteiros positivos e menores ou iguais a $5^8 \cdot 4^7$. A tarefa de um funcionário consiste em escolher dois números da planilha uma única vez e realizar a operação de multiplicação entre eles. Para que o funcionário tenha precisão absoluta e possa visualizar todos os algarismos do número obtido após a multiplicação, ele deverá utilizar uma calculadora cujo visor tenha capacidade mínima de dígitos igual a

- **a.** 44
- **b.** 22
- **c.** 20
- **d.** 15
- **e.** 10

11. Enem C1-H3

A resolução das câmeras digitais modernas é dada em megapixels, unidade de medida que representa um milhão de pontos. As informações sobre cada um desses pontos são armazenadas, em geral, em 3 bytes. Porém, para evitar que as imagens ocupem muito espaço, elas são submetidas a algoritmos de compressão, que reduzem em até 95% a quantidade de bytes necessários para armazená-las. Considere 1 KB = 1 000 bytes, 1 MB = 1 000 KB, 1 GB = 1 000 MB.

Utilizando uma câmera de 2.0 megapixels cujo algoritmo de compressão é de 95%, João fotografou 150 imagens para seu trabalho escolar. Se ele deseja armazená-las de modo que o espaço restante no dispositivo seja o menor espaço possível, ele deve utilizar

- **a.** um CD de 700 MB.
- **b.** um pendrive de 1 GB.
- **c.** um HD externo de 16 GB.
- **d.** um memory stick de 16 MB.
- **e.** um cartão de memória de 64 MB.

12. UFRGS

O algarismo das unidades de $9^{99} - 4^{44}$ é

- **a.** 1
- **b.** 2
- **c.** 3
- **d.** 4
- **e.** 5

13. Mackenzie-SP

A fração $\dfrac{2^{98}+4^{50}-8^{34}}{2^{99}-32^{20}+2^{101}}$ é igual a

- **a.** 1
- **b.** $-\dfrac{11}{6}$
- **c.** 2
- **d.** $-\dfrac{5}{2}$
- **e.** $\dfrac{7}{4}$

14. Enem C1-H4

Técnicos concluem mapeamento do aquífero Guarani

O aquífero Guarani localiza-se no subterrâneo dos territórios da Argentina, Brasil, Paraguai e Uruguai, com extensão total de 1 200 000 quilômetros quadrados, dos quais 840 000 quilômetros quadrados estão no Brasil. O aquífero armazena cerca de 30 mil quilômetros cúbicos de água e é considerado um dos maiores do mundo.

Na maioria das vezes em que são feitas referências à água, são usadas as unidades metro cúbico e litro, e não as unidades já descritas. A Companhia de Saneamento Básico do Estado de São Paulo (Sabesp) divulgou, por exemplo, um novo reservatório cuja capacidade de armazenagem é de 20 milhões de litros.

Disponível em: <http://noticias.terra.com.br>. Acesso em: 10 jul. 2009. Adaptado.

Comparando as capacidades do aquífero Guarani e desse novo reservatório da Sabesp, a capacidade do aquífero Guarani é

- **a.** $1{,}5 \cdot 10^2$ vezes a capacidade do reservatório novo.
- **b.** $1{,}5 \cdot 10^3$ vezes a capacidade do reservatório novo.
- **c.** $1{,}5 \cdot 10^6$ vezes a capacidade do reservatório novo.
- **d.** $1{,}5 \cdot 10^8$ vezes a capacidade do reservatório novo.
- **e.** $1{,}5 \cdot 10^9$ vezes a capacidade do reservatório novo.

PV2D-17-10

15. UEL-PR

Simplificando-se a expressão $\dfrac{3^{3-n} + 3 \cdot 3^{2-n} - 9 \cdot 3^{1-n}}{9 \cdot 3^{2-n}}$ para $n \in \mathbb{R}$, obtém-se

a. $\dfrac{1}{6}$

b. $\dfrac{1}{3}$

c. $6 \cdot 3^{n-1}$

d. $1 - 3^{1-n}$

e. -3^{n+1}

16. EPCAR-MG

Simplificando-se a expressão

$$S = \frac{\left(x^{-2}\right)^{2^{2^2}} \cdot \left[\left(-x^{-2}\right)^{3^{2^2}}\right]^{-1}}{x^{2^3} \cdot \left[\left(-x^{3}\right)^{3^2}\right]^{2^3}},$$

em que $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq -1$, obtém-se

a. $-x^{-94}$

b. x^{94}

c. x^{-94}

d. $-x^{94}$

17. UFRN

A acidez de uma solução depende da sua concentração de íons hidrogênio $[H^+]$. Tal acidez é medida por uma grandeza denominada pH, expressa em escala logarítmica de base 10^{-1}. Assim, quando dizemos que o pH de uma solução é x, isso significa que a concentração de íons hidrogênio é 10^{-x} mol/L.

O pH do café é 5 e o do leite de magnésia é 10.

Podemos dizer que o café, em relação ao leite de magnésia, apresenta uma concentração de íons hidrogênio

a. 100 vezes maior.

b. 1 000 vezes maior.

c. 10 000 vezes maior.

d. 100 000 vezes maior.

18. Fuvest-SP

De 1869 até hoje, ocorreram as seguintes mudanças de moeda no Brasil: (1) em 1942, foi criado o cruzeiro, cada cruzeiro valendo mil réis; (2) em 1967, foi criado o cruzeiro novo, cada cruzeiro novo valendo mil cruzeiros; em 1970, o cruzeiro novo voltou a se chamar apenas cruzeiro; (3) em 1986, foi criado o cruzado, cada cruzado valendo mil cruzeiros; (4) em 1989, foi criado o cruzado novo, cada um valendo mil cruzados; em 1990, o cruzado novo passou a se chamar novamente cruzeiro; (5) em 1993, foi criado o cruzeiro real, cada um valendo mil cruzeiros; (6) em 1994, foi criado o real, cada um valendo 2.750 cruzeiros reais.

Quando morreu, em 1869, Brás Cubas possuía 300 contos.

Se esse valor tivesse ficado até hoje em uma conta bancária, sem receber juros e sem pagar taxas, e se, a cada mudança de moeda, o depósito tivesse sido normalmente convertido para a nova moeda, o saldo hipotético dessa conta seria, aproximadamente, de um décimo de

a. real.

b. milésimo de real.

c. milionésimo de real.

d. bilionésimo de real.

e. trilionésimo de real.

Dados

Um conto equivalia a um milhão de réis.

Um bilhão é igual a 10^9 e um trilhão é igual a 10^{12}.

19. ESPM-SP

Em relação ao número $N = 2^{48} - 1$, pode-se afirmar que

a. ele é primo.

b. ele é par.

c. ele é múltiplo de 7.

d. ele não é múltiplo de $2^{24} + 1$.

e. ele não é divisível por 9.

20. FGV-SP

Observe o padrão indicado na tabela.

x	3^x	7^x
0	1	1
1	3	7
2	9	49
3	27	343
4	81	2 401
5	243	16 807
6	729	117 649
7	2 187	823 543
8	6 561	5 764 801
9	19 683	40 353 607
...	...	...

a. Determine o algarismo da unidade de $3^{2\,009}$.

b. Determine o algarismo da unidade de $3^{423} + 7^{651} - 2^{58}$.

Veja o gabarito desses exercícios propostos na página 119.

Módulo 2

Radiciação

https://coc.pear.sn/pMWyOD

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

ROTEIRO DE ESTUDOS		Leia com atenção	Capítulo 1 – Tópicos de 2.A a 2.G.							
	Exercícios	Série branca	21	23	24	25	26	29	30	32
		Série amarela	22	24	26	27	28	30	32	35
		Série roxa	32	33	34	35	36	38	39	40
		Foco Enem	24	25	28	29	31	34	35	37

21. PUC-RJ

O valor de $\sqrt{(-3)^2+(-1)^6-(-1{,}2)^0+\sqrt[3]{4^6}}$ é

a. 13
b. 15
c. 17
d. 19
e. 21

22. Cefet-MG

Simplificando a expressão $\sqrt{\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt[3]{x^4}}}$ na qual $x \in \mathbb{R}_+^*$, obtém-se

a. $\sqrt[12]{x}$
b. $\sqrt[6]{x^5}$
c. $\sqrt[12]{x^5}$
d. $\sqrt[6]{x}$

23. ESA-RJ

Simplificando $2\sqrt{8}-4\sqrt{18}+\sqrt{32}$, obtemos

a. $\sqrt{2}$
b. $-\sqrt{8}$
c. $\sqrt{8}$
d. $-4\sqrt{2}$
e. $-2\sqrt{2}$

24. Enem C1-H3

Dentre outros objetos de pesquisa, a alometria estuda a relação entre medidas de diferentes partes do corpo humano. Por exemplo, segundo a alometria, a área A da superfície corporal de uma pessoa relaciona-se com a sua massa m pela fórmula $A=k\cdot m^{\frac{2}{3}}$ em que k é uma constante positiva.

Se no período que vai da infância até a maioridade de um indivíduo sua massa é multiplicada por 8, por quanto será multiplicada a área da superfície corporal?

a. $\sqrt[3]{16}$
b. 4
c. $\sqrt{24}$
d. 8
e. 64

25. IFCE

Racionalizando o denominador da fração $\dfrac{2\sqrt{2}}{5\sqrt[8]{2^3}}$, obtemos, como resultado

a. $\dfrac{2\sqrt[8]{2}}{5}$
b. $\dfrac{2\sqrt[8]{2^3}}{5}$
c. $\dfrac{5\sqrt[8]{2}}{5}$
d. $\dfrac{5\sqrt[8]{2^3}}{2}$
e. $\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$

26. UTFPR

$\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[3]{5}$ é igual a

a. $\sqrt[3]{5}$
b. $5\dfrac{\sqrt[3]{5}}{5}$
c. $\sqrt[4]{5}$
d. $5\sqrt[4]{5}$
e. $\sqrt{5}$

27. Cefet-MG

Se $m=\dfrac{5-\sqrt{3}}{22}$ e $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=1$, então o valor de n é

a. $\dfrac{-4+\sqrt{3}}{13}$
b. $2+\sqrt{3}$
c. $\dfrac{-1-\sqrt{3}}{10}$
d. $\dfrac{4\sqrt{3}}{13}$

28. Uneb-BA C1-H3

A expressão $P(t) = k \cdot 2^{0{,}05t}$ fornece o número P de milhares de habitantes de uma cidade, em função do tempo t em anos. Se em 1990 essa cidade tinha 300 000 habitantes, quantos habitantes, aproximadamente, espera-se que ela tenha no ano de 2000?

a. 325 000
b. 401 000
c. 423 000
d. 439 000
e. 441 000

29. Fuvest-SP

Simplifique $\sqrt[3]{\dfrac{2^{28}+2^{30}}{10}}$.

a. $\dfrac{2^8}{5}$
b. $\dfrac{2^9}{5}$
c. 28
d. 29
e. $\left(\dfrac{2^{58}}{10}\right)^{\frac{1}{3}}$

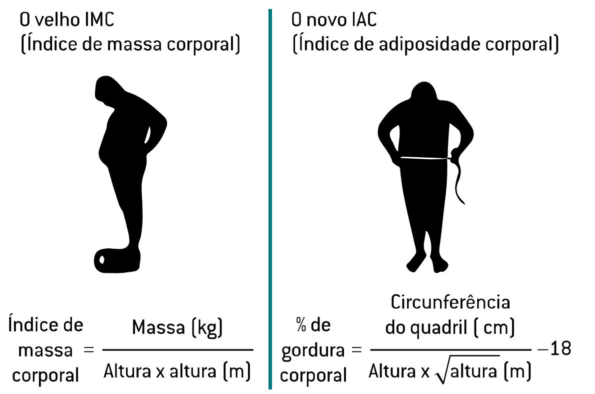
30. Unicamp-SP (adaptado)

a. Dados os dois números positivos, $\sqrt[3]{3}$ e $\sqrt[4]{4}$, determine o maior.
b. Calcule $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{4}$.

PV2D-17-10

31. Enem C1-H4

O Índice de Massa Corporal (IMC) é largamente utilizado há cerca de 200 anos, mas esse cálculo representa muito mais a corpulência que a adiposidade, uma vez que indivíduos musculosos e obesos podem apresentar o mesmo IMC. Uma nova pesquisa aponta o Índice de Adiposidade Corporal (IAC) como uma alternativa mais fidedigna para quantificar a gordura corporal, utilizando a medida do quadril e a altura. A figura mostra como calcular essas medidas, sabendo-se que, em mulheres, a adiposidade normal está entre 19% e 26%.



Disponível em: <http://www1.folha.uol.com.br>. Acesso em: 24 abr. 2011. Adaptado.

Uma jovem com IMC = 20 kg/m^2, 100 cm de circunferência dos quadris e 60 kg de massa corpórea resolveu averiguar seu IAC. Para se enquadrar aos níveis de normalidade de gordura corporal, a atitude adequada que essa jovem deve ter diante da nova medida é

Use $\sqrt{3} = 1{,}7$ e $\sqrt{1{,}7} = 1{,}3$.

a. reduzir seu excesso de gordura em cerca de 1%.
b. reduzir seu excesso de gordura em cerca de 27%.
c. manter seus níveis atuais de gordura.
d. aumentar seu nível de gordura em cerca de 1%.
e. aumentar seu nível de gordura em cerca de 27%.

32. Fuvest-SP

$\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}$ é igual a

a. $\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt[3]{4}$
b. $\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}$
c. $\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}$
d. $\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt[3]{4}$
e. $\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt[3]{4}$

33. ESPM-SP

O valor da expressão $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} - \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ é igual a

a. $2\sqrt{2}$
b. $-2\sqrt{2}$
c. 0
d. $4\sqrt{2}$
e. $-4\sqrt{2}$

34. IFSC C1-H1

Considere a expressão numérica $A = \dfrac{0{,}001}{1000} + 8^{\frac{2}{3}} + \sqrt{25}$. É correto afirmar que o valor de A é

a. 9
b. 10s
c. 81,003
d. 69
e. 9,000001

35. Unifesp

Se 0 < a < b, racionalizando o denominador, tem-se que:

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a}$$

Assim, o valor da soma

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{999}+\sqrt{1000}}$$ é

a. $10\sqrt{10}-1$
b. $10\sqrt{10}$
c. 99
d. 100
e. 101

36. Cefet-MG

Considerando as afirmações que envolvem propriedades de potenciação e radiciação:

I. $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}} = \sqrt[8]{a}, (a > 0)$

II. $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}, (a > b > 0)$

III. $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = a-b, (a > 0 \text{ e } b > 0)$

IV. $(\sqrt{ab} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}, (a > 0 \text{ e } b > 0)$

pode-se concluir que são corretos apenas os itens

a. I e II.
b. I e IV.
c. II e III.
d. II e IV.

37. IFAL

O número $N = \dfrac{1}{\sqrt{32+10\sqrt{7}}} + \dfrac{1}{\sqrt{32-10\sqrt{7}}}$ é um decimal ilimitado periódico. Se N for escrito sob a forma da fração irredutível $\dfrac{a}{b}$, então a + b é igual a

a. 11
b. 12
c. 13
d. 14
e. 15

PV2D-17-10

38. UPE

Carlos, ao resolver um exercício de matemática, encontrou como solução $x=\sqrt{33+8\sqrt{2}}$, porém foi surpreendido pela resposta de seu professor que afirmava que a resposta verdadeira era da forma $x=a+b\sqrt{2}$, com a e b números racionais positivos. Indagado por Carlos, o professor respondeu: Carlos, sua resposta é verdadeira, ou seja, $x=\sqrt{33+8\sqrt{2}}=a+b\sqrt{2}$, com a e b racionais positivos. É correto afirmar que (a + b) na resposta do professor é igual a

a. 4
b. 5
c. 6
d. 9
e. 8

39. Unifor-CE

Simplificando-se $\left(2^{-\frac{2}{3}}-3^{-\frac{2}{3}}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right)^{-1}\cdot\sqrt[3]{36}$, obtém-se

a. $6^{\frac{2}{3}}$
b. $2^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{1}{3}}$
c. $3^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}}$
d. $5^{\frac{1}{3}}$
e. 6

40. UTFPR

A expressão $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}$ é igual a

a. $\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y}}{x-y}$

b. $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2y^2}+\sqrt[3]{y^2}}{x-y}$

c. $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{x-y}$

d. $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{x+y}$

e. $\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2y^2}-\sqrt[3]{y}}{x+y}$

Veja o gabarito desses exercícios propostos na página 119.

PV2D-17-10

JOHANNES WERNER

2 Razões trigonométricas no triângulo retângulo — PARTE I

A necessidade de resolver problemas envolvendo cálculo de distâncias inacessíveis muito contribuiu para o surgimento de um ramo da matemática, a trigonometria.

Termo usado pela primeira vez por Bartholomeus Pitiscus em seu livro *Thesaurus mathematicus*, a **trigonometria**, do grego *trígónon* (triângulo) mais *métron* (medida), iniciou-se com o estudo das relações entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo retângulo e evoluiu para aplicações num triângulo qualquer. Hoje, suas aplicações são relevantes em várias áreas, tais como engenharia, astronomia, física, geografia e música.

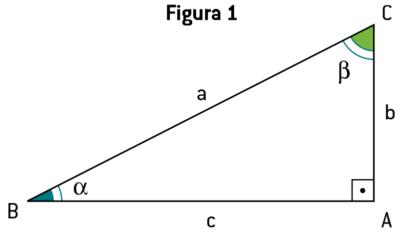
Na topografia (descrição de uma localidade), conhecimentos de trigonometria e a utilização de um teodolito possibilitam obter informações precisas no planejamento de loteamentos, construção de estradas e túneis etc.

1. Introdução

Definiremos algumas relações e números obtidos a partir dos lados de triângulos retângulos. Antes, porém, precisamos rever algumas de suas propriedades.

A figura 1 apresenta um triângulo em que um dos ângulos internos é reto (de medida 90° ou $\frac{\pi}{2}$ rad), o que permite classificá-lo como **triângulo retângulo**.

Figura 1



Lembremo-nos de que, qualquer que seja o triângulo, a soma dos seus três ângulos internos vale 180°. Logo, a respeito do triângulo ABC apresentado, dizemos que:

$\alpha + \beta + 90° = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 90°$

Com isso, podemos concluir que:

a. os ângulos α e β são **complementares**, isto é, são ângulos cujas medidas somam 90°;

b. uma vez que são complementares, ambos terão medida inferior a 90°.

Portanto, dizemos que todo triângulo retângulo tem **um ângulo interno reto e dois agudos, complementares entre si**.

De acordo com a figura, reconhecemos nos lados **b** e **c** os **catetos** do triângulo retângulo e em **a** sua **hipotenusa**.

Lembremo-nos de que a hipotenusa será sempre o lado oposto ao ângulo reto e, ainda, o lado maior do triângulo. Podemos relacioná-los por meio do **teorema de Pitágoras**, o qual enuncia que "o quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados sobre os catetos" (*sic*) ou, em linguajar moderno, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo.

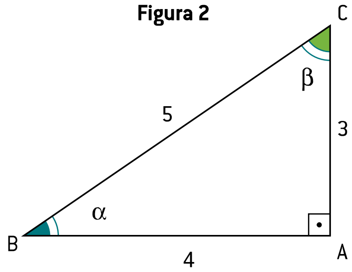
Aplicado ao nosso triângulo e escrito em linguagem matemática, o teorema seria expresso como segue:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

2. Seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo

A figura 2 ilustra um triângulo retângulo conhecido como **triângulo pitagórico**, classificação decorrente do fato de que, segundo a tradição grega, por meio dele Pitágoras enunciou seu teorema.

Figura 2



De fato, as medidas de seus lados (3, 4 e 5 unidades de comprimento) satisfazem a sentença $5^2 = 3^2 + 4^2$.

Apesar de nos apoiarmos particularmente no triângulo pitagórico, as relações que iremos definir são válidas para todo e qualquer triângulo retângulo. Apenas queremos, dessa forma, obter alguns resultados que serão comparados adiante.

Definimos seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo pelas relações apresentadas no quadro:

$$\text{seno do ângulo} = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{cosseno do ângulo} = \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tangente do ângulo} = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo}}{\text{cateto adjacente ao ângulo}}$$

Com base nessas definições, o cálculo de seno, cosseno e tangente do ângulo α, por exemplo, fornecerá os seguintes valores:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

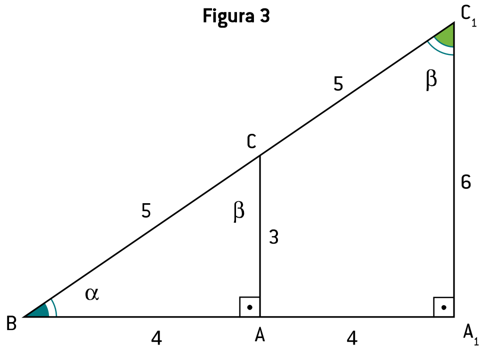
$$\text{tg}\,\alpha = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

Ao que acabamos de costatar, aliemos um conhecimento adquirido da geometria. Ela nos ensina que dois triângulos de lados proporcionais são semelhantes.

Se multiplicarmos, então, os comprimentos dos lados de nosso triângulo por 2, teremos um triângulo pitagórico semelhante, com os novos lados (6, 8 e 10) igualmente satisfazendo o teorema de Pitágoras.

Na figura 3, apresentamos o resultado dessa operação, em que mostramos os triângulos ABC, já conhecido na figura 1, e A_1BC_1.

Figura 3



Observemos que os ângulos α e β continuam sendo os ângulos agudos internos do triângulo recém-construído.

Lançando mão das medidas dos novos lados $\overline{A_1B}$, $\overline{BC_1}$ e $\overline{A_1C_1}$ (respectivamente 8, 10 e 6 unidades de comprimento), calculemos, para o ângulo α, os valores de seno, cosseno e tangente:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{6}{10} = 0{,}6$$

$$\cos\alpha = \frac{8}{10} = 0{,}8$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{6}{8} = 0{,}75$$

Nosso intuito, com a repetição dessas operações, é mostrar que, independentemente de o triângulo ser maior ou menor, as relações definidas como seno, cosseno e tangente têm, individualmente, valores constantes, desde que calculadas para os mesmos ângulos.

PV2D-17-10

Em outras palavras, **seno, cosseno e tangente são funções apenas dos ângulos internos do triângulo retângulo**, e não de seus lados.

3. Outras razões trigonométricas: cotangente, secante e cossecante

Além das razões com que trabalhamos até aqui, são definidas a cotangente, secante e cossecante de um ângulo agudo do triângulo retângulo por meio das relações entre seus lados, conforme quadro:

$$\text{cotangente do ângulo} = \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo}}{\text{cateto oposto ao ângulo}}$$

$$\text{secante do ângulo} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente ao ângulo}}$$

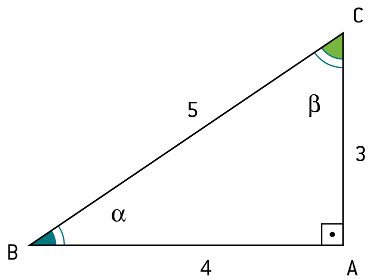
$$\text{cossecante do ângulo} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto ao ângulo}}$$

Por exemplo, para um triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5 unidades de comprimento, teríamos, para o ângulo α:

$$\text{cotg}\ \alpha = \frac{4}{3}$$

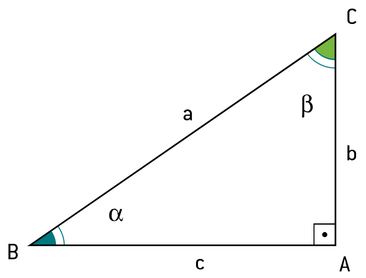
$$\sec \alpha = \frac{5}{4}$$

$$\text{cossec}\ \alpha = \frac{5}{3}$$



4. Seno, cosseno, tangente e cotangente de ângulos complementares

Já foi visto que, em todo triângulo retângulo, os ângulos agudos são complementares.



$\alpha + \beta = 90°$

Sabemos ainda que:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{b}{a} \qquad \text{sen}\ \beta = \frac{c}{a}$$

$$\cos \alpha = \frac{c}{a} \qquad \cos \beta = \frac{b}{a}$$

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{b}{c} \qquad \text{tg}\ \beta = \frac{c}{b}$$

$$\text{cotg}\ \alpha = \frac{c}{b} \qquad \text{cotg}\ \beta = \frac{b}{c}$$

Assim, verifica-se facilmente que:

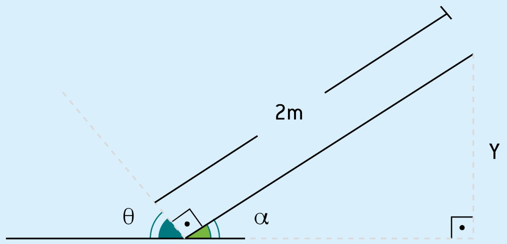
sen α = cos β cos α = sen β

tg α = cotg β cotg α = tg β

APRENDER SEMPRE 30

01. Unifor-CE

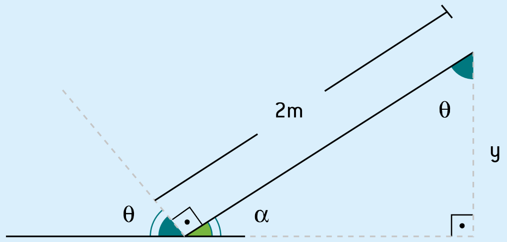
Uma cama de hospital, equipada com um ajustador hidráulico, move-se de acordo com um controle manual de subir e descer.



A altura y que a cama varia em função de θ é de

a. $y = 2 \text{ sen } \theta$
b. $y = 2 \text{ sen } \theta + 2$
c. $y = \text{tg } \theta + 2$
d. $y = 2 \cos \theta$
e. $y = 2 \cos \theta + 2$

Resolução



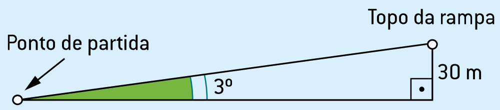
Da figura, temos $\alpha + \theta = 90°$ (ângulos complementares). Assim, o triângulo retângulo tem um ângulo de medida θ. Logo:

$$\cos \theta = \frac{y}{2} \Rightarrow y = 2 \cdot \cos \theta$$

Alternativa correta: D

02. Vunesp

Um ciclista sobe, em linha reta, uma rampa com inclinação de 3 graus a uma velocidade constante de 4 metros por segundo. A altura do topo da rampa em relação ao ponto de partida é 30 m.



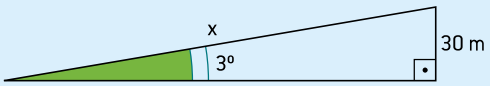
Use a aproximação sen 3° = 0,05 e responda: o tempo, em minutos, que o ciclista levou para percorrer completamente a rampa é

a. 2,5
b. 7,5
c. 10
d. 15
e. 30

PV2D-17-10

Resolução

Sendo x o comprimento da rampa, temos:



$\text{sen}\,3^\circ = \frac{30}{x}$

$0{,}05 = \frac{30}{x}$

$x = \frac{30}{0{,}05}$

$x = \frac{30}{\frac{5}{100}}$

$x = \cancel{30}^{6}\,\frac{100}{\cancel{5}_{1}}$

$x = 600\,\text{m}$

Como a velocidade do ciclista é de $4\,\text{m/s}$, então o tempo gasto por ele é:

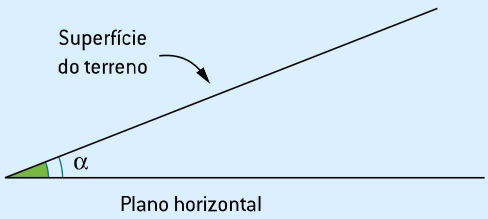
$\frac{600}{4} = 150$ segundos, o que equivale a 2,5 minutos.

Alternativa correta: A

03. ETEC-CPS

Um terreno inclinado traz dificuldades para a construção civil, para a agricultura e para um caminhante aventureiro.

Seja α a medida do ângulo que a superfície do terreno faz com o plano horizontal, conforme a figura.



A taxa de declividade, ou apenas declividade, de um terreno é a tangente desse ângulo α. A declividade de um terreno é, normalmente, expressa em porcentagem, por exemplo, se tg α = 0,23, então a taxa de declividade é 23%

Um excursionista sobe uma montanha que tem declividade de 50%. Considere que, do ponto que o excursionista partiu até o topo da montanha, o desnível vencido foi de 1 000 metros.

Nessas condições, a menor distância percorrida pelo excursionista até o topo da montanha é , em quilômetros

a. $\sqrt{2}$

b. $\sqrt{3}$

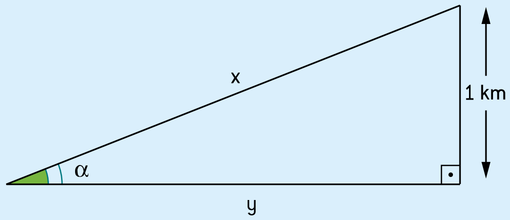
c. $\sqrt{4}$

d. $\sqrt{5}$

e. $\sqrt{6}$

Resolução

Considerando uma montanha com declividade de 50% $\left(\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{2}\right)$ e com desnível de 1 000 m = 1 km, temos:



Sendo x a distância percorrida até o topo da montanha, então:

$\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{y} \Rightarrow y = 2\,\text{km}$

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$x^2 = 1^2 + y^2 \Rightarrow x^2 = 1 + 2^2 \Rightarrow x = \sqrt{5}\,\text{km}$

Logo, a distância pedida será de $\sqrt{5}\,\text{km}$

Alternativa correta: D

04. UEM-PR

Um triângulo retângulo ABC tem cateto AB com medida 30 metros e cateto AC com medida 40 metros. Sabe-se que a medida de um dos ângulos agudos α é tal que $\text{tg}(\alpha) = \frac{3}{4}$ Deseja-se ampliar a área desse triângulo em 30% por meio de um prolongamento do lado AB, na semirreta de origem A, que passa por B, formando um novo triângulo retângulo ADC cujo ângulo $\hat{ADC}$ mede γ. Nessas condições, assinale o que for correto.

01. O lado AB deve ser prolongado em 9 metros.

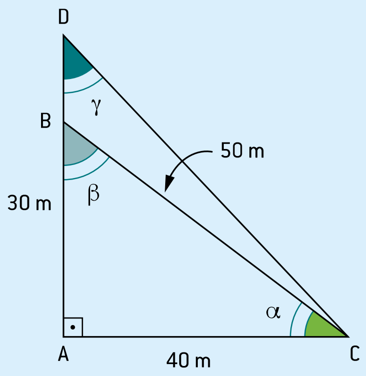
02. A área que foi ampliada é de 360 metros quadrados

04. A medida β do ângulo formado entre o cateto AB e a hipotenusa BC é maior que a medida do ângulo γ.

08. A tangente de γ é $\frac{9}{2}$.

16. O seno de α é $\frac{4}{5}$.

Resolução



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos BC = 50 m.

01. Correto, pois 30% de 30 m = $\frac{30}{100} \cdot 30\,\text{m} = 9\,\text{m}$.

02. Incorreto. A área ampliada é dada em m², por $A = \frac{9 \cdot 40}{2} = 180\,\text{m}^2$.

PV2D-17-10

04. Correto, pois $\text{tg}\,\beta = \dfrac{40}{30}$ e $\text{tg}\,\gamma = \dfrac{40}{39}$, assim $\beta > \gamma$.

08. Incorreto, pois $\text{tg}\,\gamma = \dfrac{40}{39}$.

16. Incorreto, pois $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{30}{50} = \dfrac{3}{5}$.

Resposta: 05 (01 + 04)

5. Seno, cosseno e tangente de ângulos notáveis

Uma vez definidos os conceitos de seno, cosseno e tangente de ângulos agudos internos a um triângulo retângulo, passaremos a determinar seus valores para ângulos de grande utilização em diversas atividades profissionais e encontrados facilmente em situações cotidianas, tais como as que se seguem.

a. Em física, no estudo da mecânica, demonstra-se que o ângulo de lançamento, tomado em relação à horizontal, para o qual se obtém o máximo alcance com uma mesma velocidade de tiro, é de 45°.

b. Uma colmeia é constituída, interiormente, de hexágonos regulares, que, por sua vez, são divisíveis, cada um, em seis triângulos equiláteros, cujos ângulos internos medem 60°.

c. Coberturas de casas, de regiões tropicais, onde não há neve, são construídas com ângulo de inclinação definido nos 30°.

Vamos selecionar, portanto, figuras planas em que possamos delimitar ângulos com as medidas citadas (30°, 45° e 60°). Para isso, passaremos a trabalhar com o quadrado e o triângulo equilátero.

Observemos, nas figuras 4 e 5, que a diagonal de um quadrado divide ângulos internos opostos, que são retos, em duas partes de 45°, e que o segmento que define a bissetriz (e altura) de um ângulo interno do triângulo equilátero permite-nos reconhecer, em qualquer das metades em que ele é dividido, ângulos de medidas 30° e 60°.

Figura 4

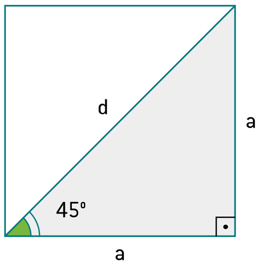
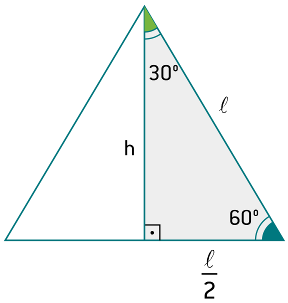


Figura 5



Primeiramente, vamos calcular os comprimentos da diagonal do quadrado (identificada na figura 4 por **d**) e a altura **h** do triângulo equilátero (figura 5).

Uma vez que as regiões sombreadas nas figuras são triângulos retângulos, podemos aplicar o teorema de Pitágoras em cada um deles.

Para o meio-quadrado, temos que:

$d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d^2 = 2 \cdot a^2$

$\therefore d = a\sqrt{2}$

Quanto ao triângulo equilátero, podemos escrever o seguinte:

$$\ell^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3\ell^2}{4}$$

$$\therefore h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Sabemos, agora, que o triângulo sombreado no interior do quadrado (figura 4) tem catetos de medida **a** e hipotenusa $d\sqrt{2}$. Para o outro triângulo sombreado (figura 5), teremos catetos de medidas $\dfrac{\ell}{2}$ e $\dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$, enquanto sua hipotenusa terá comprimento ℓ.

Passemos, agora, ao cálculo de seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30°, 45° e 60°.

PV2D-17-10

A. Seno, cosseno e tangente de 30° e 60°

Tomando por base o triângulo equilátero da figura 5 e conhecendo as medidas de seus lados, temos:

$$\text{sen } 30° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{1}{\ell} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{h}{\ell} = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{\frac{\ell}{2}}{h} = \frac{\frac{\ell}{2}}{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}} = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{2}{\ell\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{sen } 60° = \frac{h}{\ell} = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{1}{\ell} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 60° = \frac{h}{\frac{\ell}{2}} = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\frac{\ell}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{3}$$

B. Seno, cosseno e tangente de 45°

Com base no quadrado representado na figura 4, de lados **a** e diagonal $d\sqrt{2}$, podemos calcular:

$$\text{sen } 45° = \frac{a}{d} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{a}{d} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45° = \frac{a}{a} = 1$$

Os resultados que obtivemos permitem definir, a seguir, útil tabela de valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis.

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Papiro de Rhind, **Museu de Londres.**

A origem da trigonometria é incerta. Entretanto, pode-se dizer que o início do seu desenvolvimento se deu principalmente graças aos problemas gerados pela astronomia, agrimensura e navegações, por volta do século IV ou V a.C., com os egípcios e babilônios. É possível encontrar problemas envolvendo a cotangente no *Papiro de Rhind* e também uma notável tábua de secantes na tábula cuneiforme babilônica *Plimpton 322*.

Não se sabe ao certo se o conceito da medida de ângulo surgiu com os gregos ou se eles, por contato com a civilização babilônica, adotaram suas frações sexagesimais.

Muito se deve aos trabalhos de Aristarco de Samos (310-230 a.C.) e Hiparco de Niceia (180-125 a.C.).

Disponível em: <http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_trigonometria.htm>. Adaptado.

APRENDER SEMPRE 31

01. FGV

Num triângulo retângulo, a hipotenusa mede 15 e o ângulo $A\hat{B}C$, 60°. A soma das medidas dos catetos vale

a. $15\left(1+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

b. $\frac{15}{4}$

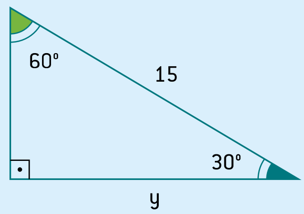
c. $15(1+\sqrt{3})$

d. $\frac{15}{2}$

e. $\frac{15(1+\sqrt{3})}{2}$

Resolução

Com base no enunciado, constrói-se a figura:



$$\text{sen } 30° = \frac{x}{15} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{15} \Rightarrow x = \frac{15}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{y}{15} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{15} \Rightarrow y = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore x + y = \frac{15(1+\sqrt{3})}{2}$$

Alternativa correta: E

02. Vunesp

Duas rodovias retilíneas, A e B, cruzam-se formando um ângulo de 45°. Um posto de gasolina se encontra na rodovia A, a 4 km do cruzamento. Pelo posto, passa uma rodovia retilínea C, perpendicular à rodovia B. A distância do posto de gasolina à rodovia B, indo através de C, em quilômetros, é

a. $\frac{\sqrt{2}}{8}$

b. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

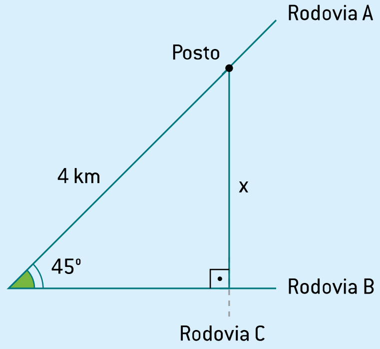
c. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d. $\sqrt{2}$

e. $2\sqrt{2}$

PV2D-17-10

Resolução



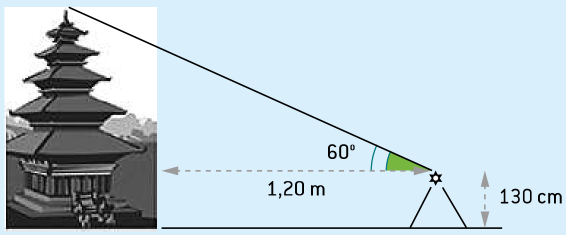
$$\text{sen } 45° = \frac{x}{4}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{4} \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$$

Alternativa correta: E

03. UEMG

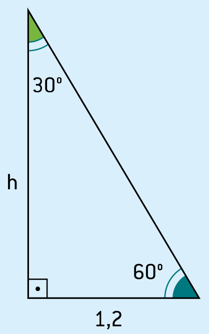
Em uma de suas viagens para o exterior, Luís Alves e Guiomar observaram um monumento de arquitetura asiática. Guiomar, interessada em aplicar seus conhecimentos matemáticos, colocou um teodolito distante 1,20 m da obra e obteve um ângulo de 60°, conforme mostra a figura



Sabendo-se que a altura do teodolito corresponde a 130 cm, a altura do monumento, em metros, é, aproximadamente,

a. 6,86
b. 6,10
c. 5,24
d. 3,34

Resolução



$$\text{tg}60° = \frac{h}{1,2}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{1,2}$$

$$h \approx 1,2 \cdot 1,7$$

$$h = 2,04 \text{ m}$$

Assim, a altura do monumento é igual a:

2,04 + 1,30 = 3,34 m

Alternativa correta: D

PV2D-17-10

Módulo 3

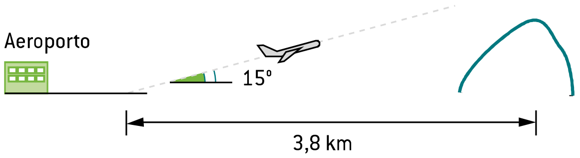
Razões trigonométricas no triângulo retângulo

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

ROTEIRO DE ESTUDOS									
Leia com atenção	Capítulo 2 – Tópicos de 1 a 5.								
Exercícios	Série branca	41	42	44	45	47	49	50	52
	Série amarela	42	44	46	47	48	50	52	55
	Série roxa	52	53	54	55	57	58	59	60
	Foco Enem	44	45	47	48	50	51	54	55

41. Unicamp-SP

Ao decolar, um avião deixa o solo com um ângulo constante de 15°. A 3,8 km da cabeceira da pista existe um morro íngreme. A figura ilustra a decolagem, fora de escala.

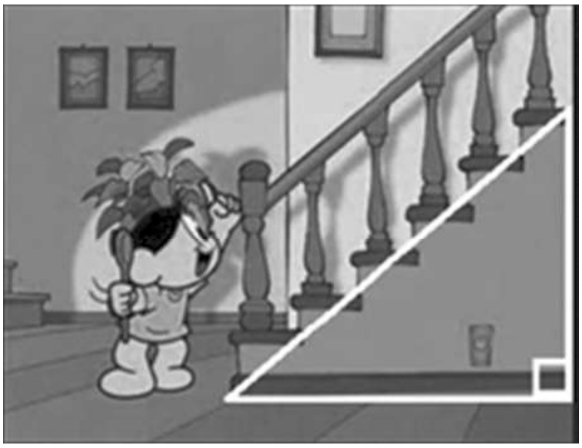


Podemos concluir que o avião ultrapassa o morro a uma altura, a partir da sua base, de

a. 3,8 tg (15°) km
b. 3,8 sen (15°) km
c. 3,8 cos (15°) km
d. 3,8 sec (15°) km

42. UEMG

Observe a figura



Maurício de Sousa

Tendo como vista lateral da escada com 6 degraus um triângulo retângulo isósceles de hipotenusa $\sqrt{10}$ metros, Magali observa que todos os degraus da escada têm a mesma altura.

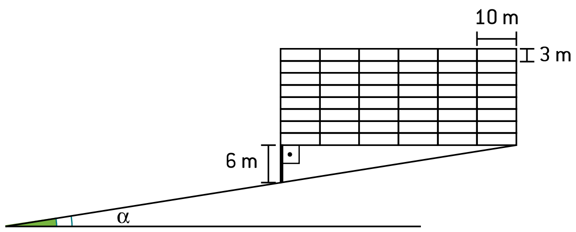
A medida em de cada degrau, corresponde, aproximadamente, a

a. 37
b. 60
c. 75
d. 83

43. FGV-SP

Um edifício comercial tem 48 salas, distribuídas em andares, conforme indica a figura. O edifício foi feito em um terreno cuja inclinação em relação à horizontal mede α graus. A altura de cada sala é 3 m, a extensão é 10 m e a altura da pilastra de sustentação, que mantém o edifício na horizontal, é 6 m.

α	sen α	cos α	tg α
4°	0,0698	0,9976	0,0699
5°	0,0872	0,9962	0,0875
6°	0,1045	0,9945	0,1051
7°	0,1219	0,9925	0,1228
8°	0,1392	0,9903	0,1405



Usando os dados da tabela, a melhor aproximação inteira para α é

a. 4°
b. 5°
c. 6°
d. 7°
e. 8°

44. Enem C3-H12

As torres Puerta de Europa são duas torres inclinadas uma contra a outra, construídas numa avenida de Madri, na Espanha. A inclinação das torres é de 15° com a vertical, e elas têm, cada uma, uma altura de 114 m (a altura é indicada na figura como o segmento AB). Essas torres são um bom exemplo de um prisma oblíquo de base quadrada, e uma delas pode ser observada na imagem.

Disponível em: <www.flickr.com>. Acesso em: 27 mar. 2012.

PV2D-17-10

Utilizando 0,26 como valor aproximado para a tangente de 15° e duas casas decimais nas operações, descobre-se que a área da base desse prédio ocupa na avenida um espaço

a. menor que 100 m^2
b. entre 100 m^2 e 300 m^2
c. entre 300 m^2 e 500 m^2
d. entre 500 m^2 e 700 m^2
e. maior que 700 m^2

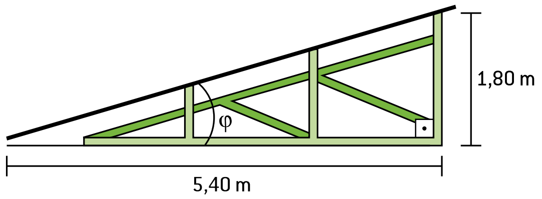
45. UECE

No triângulo XYZ, retângulo em X, a medida do ângulo interno em Y é 30°. Se M é a intersecção da bissetriz do ângulo interno em Z com o lado XY e a medida do segmento ZM é $6\sqrt{3}$ m, então pode-se afirmar corretamente que o perímetro desse triângulo é uma medida, em metros, situada entre

a. 40 e 45
b. 45 e 50
c. 50 e 55
d. 55 e 60

46. UEPA

As construções de telhados, em geral, são feitas com um grau mínimo de inclinação em função do custo. Para as medidas do modelo de telhado representado, o valor do seno do ângulo agudo φ é dado por

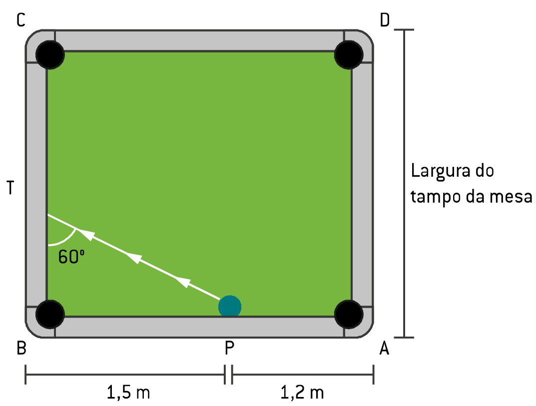


Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/933-2.pdf>. Acesso em: 9 set. 2011. Adaptado.

a. $\dfrac{4\sqrt{10}}{10}$
b. $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$
c. $\dfrac{2\sqrt{2}}{10}$
d. $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$
e. $\dfrac{\sqrt{2}}{10}$

47. Unesp

A figura representa a vista superior do tampo plano e horizontal de uma mesa de bilhar retangular ABCD, com caçapas em A, B, C e D. O ponto P, localizado em AB, representa a posição de uma bola de bilhar, sendo PB = 1,5 m e PA = 1,2 m. Após uma tacada na bola, ela se desloca em linha reta, colidindo com BC no ponto T, sendo a medida do ângulo $P\hat{T}B$ igual a 60°. Após essa colisão, a bola segue, em trajetória reta, diretamente até a caçapa D.

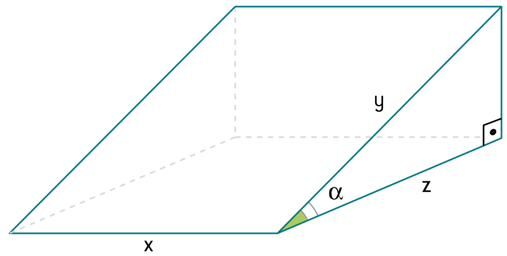


Nas condições descritas e adotando $\sqrt{3} \cong 1{,}73$, a largura do tampo da mesa, em metros, é próxima de

a. 2,42
b. 2,08
c. 2,28
d. 2,00
e. 2,56

48. Unifor-CE C3-H12

Uma rampa retangular, medindo 10 m^2, faz um ângulo de 25° em relação ao piso horizontal. Exatamente embaixo dessa rampa, foi delimitada uma área retangular A para um jardim, conforme figura.

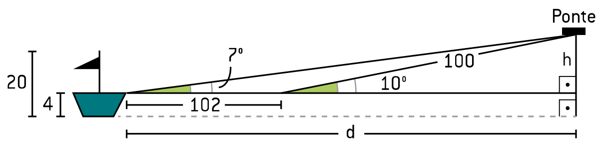


Considerando que cos 25° ≅ 0,9, a área A tem, aproximadamente,

a. 3 m^2
b. 4 m^2
c. 6 m^2
d. 8 m^2
e. 9 m^2

49. UFG-GO

Um navio, que possui 20 m de altura sobre a água, passa por um canal e, em certo momento, o capitão da embarcação avista uma ponte plana sobre o canal, da qual ele desconhece as dimensões, e tem de decidir se o navio pode passar sob a ponte. Para isso, ele inicia uma série de cálculos e medições. A primeira constatação que ele faz é a de que, a uma certa distância, d, da projeção da base da ponte, a inclinação do segmento que une a parte retilínea inferior da ponte e o ponto mais avançado do navio, que está a 4 m de altura sobre a água, é de 7°. Percorridos 102 m em linha reta em direção à ponte, ele volta a medir a inclinação, obtendo um ângulo de 10°, e verifica que a distância entre a parte retilínea inferior da ponte e o ponto mais avançado do navio é de 100 m, como ilustra a figura.



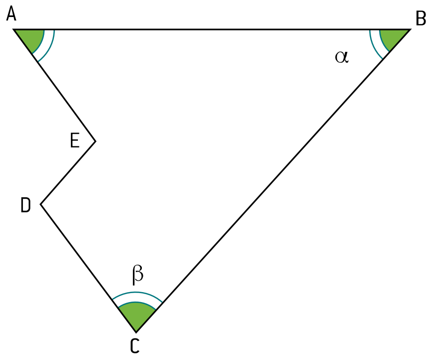
Diante do exposto, admitindo que a superfície do rio é plana, determine a altura da ponte e conclua se esta é suficiente para que o navio passe sob ela.

Dados: tg (7°) ≅ 0,12 e cos (10°) ≅ 0,98

50. Fuvest-SP

Na figura, tem-se $\overline{AE}$ paralelo a $\overline{CD}$, $\overline{BC}$ paralelo a $\overline{DE}$, AE = 2, α = 45°, β = 75°. Nessas condições, a distância do ponto E ao segmento $\overline{AB}$ é igual a

PV2D-17-10



a. $\sqrt{3}$

b. $\sqrt{2}$

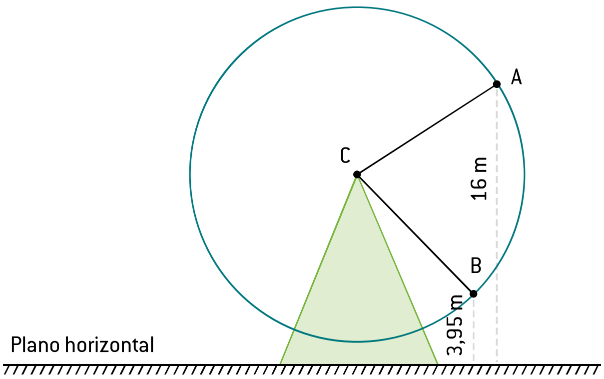
c. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

d. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

e. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

51. UERJ C3-H12

O raio de uma roda-gigante de centro C mede $\overline{CA} = \overline{CB} = 10\,\text{m}$. Do centro C ao plano horizontal do chão, há uma distância de 11 m. Os pontos A e B, situados no mesmo plano vertical, ACB, pertencem à circunferência dessa roda e distam, respectivamente, 16 m e 3,95 m do plano do chão. Observe o esquema e a tabela



θ (graus)	sen θ
15°	0,259
30°	0,500
45°	0,707
60°	0,866

A medida, em graus, mais próxima do menor ângulo ACB corresponde a

a. 45

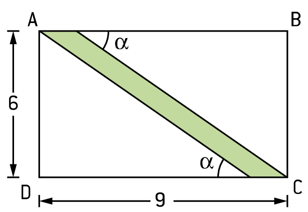
b. 60

c. 75

d. 105

52. UFRGS-RS

Na figura a seguir, o retângulo ABCD tem lados que medem 6 e 9.



Se a área do paralelogramo sombreado é 6, o cosseno de α é

a. $\dfrac{3}{5}$

b. $\dfrac{2}{3}$

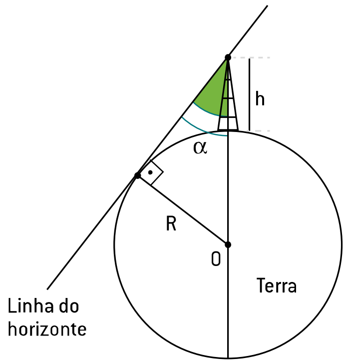
c. $\dfrac{3}{4}$

d. $\dfrac{4}{5}$

e. $\dfrac{8}{9}$

53. Espcex-SP/Aman-RJ

Em uma das primeiras tentativas de determinar a medida do raio da Terra, os matemáticos da Antiguidade observavam, do alto de uma torre ou montanha de altura conhecida, o ângulo sob o qual se avistava o horizonte, tangente à Terra, considerada esférica, conforme mostra a figura. Segundo esse raciocínio, o raio terrestre em função do ângulo α é dado por



a. $R = \dfrac{\text{sen}(\alpha h)}{1 - \text{sen}\ \alpha}$

b. $R = \dfrac{h\,\text{sen}\,\alpha}{1 - \text{sen}\,\alpha}$

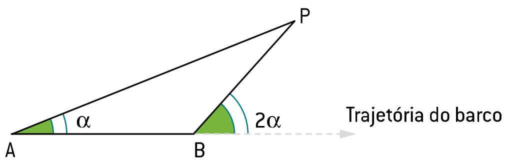
c. $R = \dfrac{h\,\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\alpha - 1}$

d. $R = \dfrac{1 - \text{sen}\,\alpha}{h\,\text{sen}\,\alpha}$

e. $R = \dfrac{1 + \text{sen}\,\alpha}{h\,\text{sen}\,\alpha}$

54. Enem C3-H12

Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura ilustra essa situação.



Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30°$ e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância AB = 2 000 m. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será

a. 1 000 m

b. $1000\sqrt{3}$ m

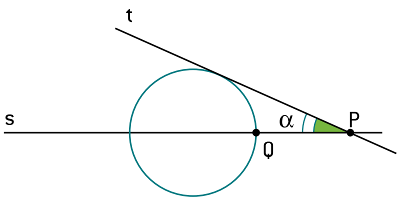
c. $2000\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ m

d. 2 000 m

e. $2000\sqrt{3}$ m

55. Fuvest-SP

Na figura, a reta s passa pelo ponto P e pelo centro da circunferência de raio R, interceptando-a no ponto Q, entre P e o centro. Além disso, a reta t passa por P, é tangente à circunferência e forma um ângulo α com a reta s. Se PQ = 2 R, então cos α vale



a. $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$

b. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

c. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

e. $\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$

56. Unicamp-SP

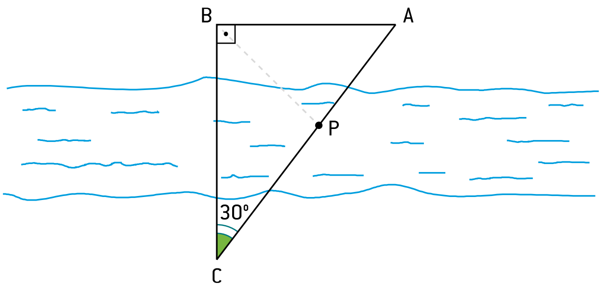
Caminhando em linha reta, ao longo de uma praia, um banhista vai de um ponto A a um ponto B, cobrindo a distância AB = 1 200 metros. Quando em A, ele avista um navio parado em N de tal maneira que o ângulo $N\hat{A}B$ é de 60° e, quando em B, verifica que o ângulo $N\hat{B}A$ é de 45°.

a. Faça uma figura ilustrativa da situação descrita.

b. Calcule a distância que se encontra o navio da praia.

57. EPCAR-MG

As cidades A, B e C situam-se às margens de um rio e são abastecidas por uma bomba situada em P, conforme a figura.



Sabe-se que o triângulo ABC é retângulo em B e a bissetriz do ângulo reto corta AC no ponto P. Se $\overline{BC} = 6\sqrt{3}$ km, então $\overline{CP}$ é, em km, igual a

a. $6+\sqrt{3}$

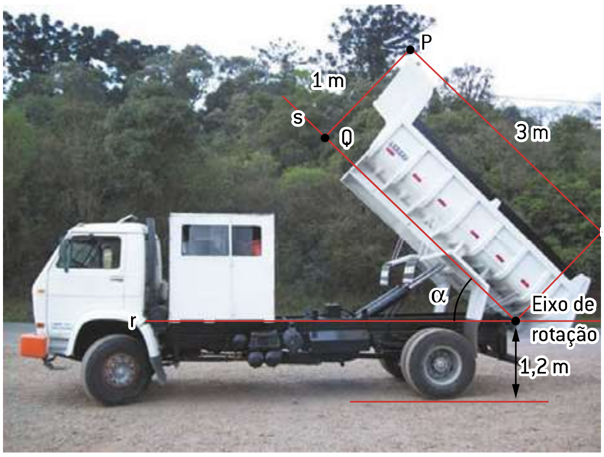
b. $6(3-\sqrt{3})$

c. $9\sqrt{3}-\sqrt{2}$

d. $9(\sqrt{2}-1)$

58. Unesp

A caçamba de um caminhão basculante tem 3 m de comprimento das direções de seu ponto mais frontal P até a de seu eixo de rotação e 1 m de altura entre os pontos P e Q. Quando na posição horizontal, isto é, quando os segmentos de retas r e s coincidirem, a base do fundo da caçamba distará 1,2 m do solo. Ela pode girar, no máximo, α graus em torno de seu eixo de rotação, localizado em sua parte traseira inferior, conforme indicado na figura.



Disponível em: <www.autobrutus.com>. Adaptado.

Dado cos α = 0,8, a altura, em metros, atingida pelo ponto P, em relação ao solo, quando o ângulo de giro α for máximo, é

a. 4,8

b. 5,0

c. 3,8

d. 4,4

e. 4,0

59. Efoa-MG

Dois observadores, A e B, estão situados a 1 m de uma das margens paralelas de um rio e conseguem ver uma pedra P sobre a outra margem. Com seus teodolitos (aparelhos usados para medir ângulo), eles medem os ângulos $P\hat{A}B = \alpha$ e $P\hat{B}A = \beta$.

Sabendo que AB = 54 m, tg α = 4 e tg β = 5, a largura do rio, em metros, é

a. 109

b. 115

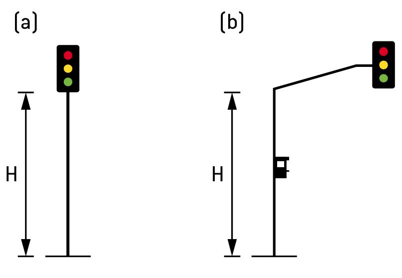
c. 129

d. 105

e. 119

60. Udesc

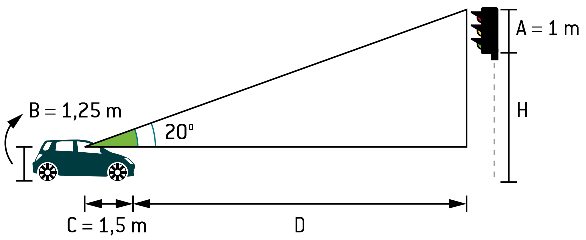
No *site* <http://www.denatran.gov.br/publicacoes/download/minuta_contran/Arquivo%206.pdf> (acesso em: 23 jun. 2012), encontra-se o posicionamento adequado da sinalização semafórica, tanto para semáforos de coluna simples como para semáforos projetados sobre a via, conforme mostra a figura a seguir.



(a) Semáforo de coluna simples

(b) Semáforo projetado sobre a via

Para que o motorista de um veículo, ao parar, possa visualizar as luzes do semáforo, o grupo focal deve ser visto sob um ângulo de 20°, conforme mostra a figura.



Legenda

A: dimensão média da altura do grupo focal

B: altura adotada dos olhos do condutor sentado no veículo

C: distância adotada entre os olhos do condutor e a frente do veículo

D: distância mínima da linha de retenção até a projeção do grupo focal sobre o solo.

Considerando tg(20°) = 0,36, determine os valores que faltam para completar a tabela a seguir.

Tipo de semáforo	D	H
Coluna simples	?	2,4
Projetado sobre a via	13,1	?

Analise as proposições em relação às informações obtidas na tabela e assinale (V) para verdadeira e (F) para falsa.

( ) Para o semáforo de coluna simples, D é aproximadamente 4,5 m.

( ) Para o semáforo projetado sobre a via, H é aproximadamente 4,2 m.

( ) A altura H do semáforo projetado sobre a via é aproximadamente 3,1 m maior que a altura H do semáforo de coluna simples.

Assinale a alternativa correta, de cima para baixo.

a. F – V – V
b. V – F – V
c. F – V – F
d. V – V – F
e. F – F – V

Veja o gabarito desses exercícios propostos na página 119.

PV2D-17-10

Gabarito dos Exercícios Propostos

MATEMÁTICA 113

Módulo 1

01. E

02. A	**08.** A	**14.** E
03. B	**09.** E	**15.** B
04. C	**10.** C	**16.** A
05. D	**11.** E	**17.** D
06. C	**12.** C	**18.** D
07. D	**13.** B	**19.** C

20. **a.** 3
b. 6

Módulo 2

21. D	**24.** B	**27.** A
22. A	**25.** A	**28.** C
23. D	**26.** B	**29.** D

30. **a.** $\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4}$.
b. $\sqrt[12]{5184}$

31. A

32. D	**35.** A	**38.** B
33. E	**36.** D	**39.** B
34. E	**37.** D	**40.** C

Módulo 3

41. A

42. A

43. C	**45.** A	**47.** A
44. E	**46.** D	**48.** E

49. $h \cong 24$ m
Portanto, a altura da ponte é suficiente para que o navio passe sob ela.

50. A

51. C

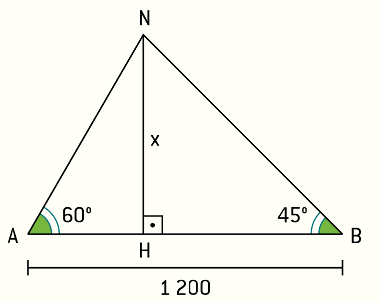
52. D

53. B

54. B

55. D

56. **a.**



b. $600 \cdot \left(3 - \sqrt{3}\right)$ m

57. B

58. C

59. E

60. B

PV2D-17-10

Anotações

PV2D-17-10