Matemática

211

212

FÍS
QUÍ
BIO
LPO
HIS
GEO
FIL
SOC
RES

MAT

NETWORK

- Utilizar os conceitos básicos da teoria dos conjuntos em diferentes contextos.
- Aplicar o conceito de subconjunto na resolução de problemas, em diferentes contextos.
- Identificar operações com conjuntos em um diagrama de Euler-Venn.
- Efetuar operações com conjuntos.
- Resolver problemas que envolvem o cálculo de elementos da união de conjuntos.

HOROSCOPE/SHUTTERSTOCK

Conjuntos 1

Por *big data* ("megadados", em português) entende-se um enorme conjunto de dados oriundos de várias fontes diferentes (redes sociais, comunidades virtuais, comércio eletrônico, cartões de crédito, aparelhos de GPS, leitores de código de barras etc.) que, ao serem gerenciados e analisados, permitem detectar tendências antes mesmo que elas aconteçam. Conforme o volume, a variedade e a velocidade com que esses dados são coletados, armazenados e tratados, aumenta-se o número de *insights* que ajudam a agregar valor e inovação, causando, por exemplo, mudanças nos padrões sociais e no comportamento do consumidor.

1. Noções sobre conjuntos

A. Introdução

Em nossa linguagem comum, encontramos diferentes palavras para expressar uma coleção de objetos usadas nas diversas áreas do conhecimento humano.

Ao consultarmos a Tabela Periódica dos elementos químicos, proposta pelo russo Dimitri Mendeleev, em 1869, e aperfeiçoada pelo inglês Henry Moseley, em 1914, encontramos, por exemplo, a família dos gases nobres (He, Ne, Ar, Kr, Xe, Rn). Os elementos químicos de uma mesma família apresentam propriedades químicas semelhantes (elementos representativos).

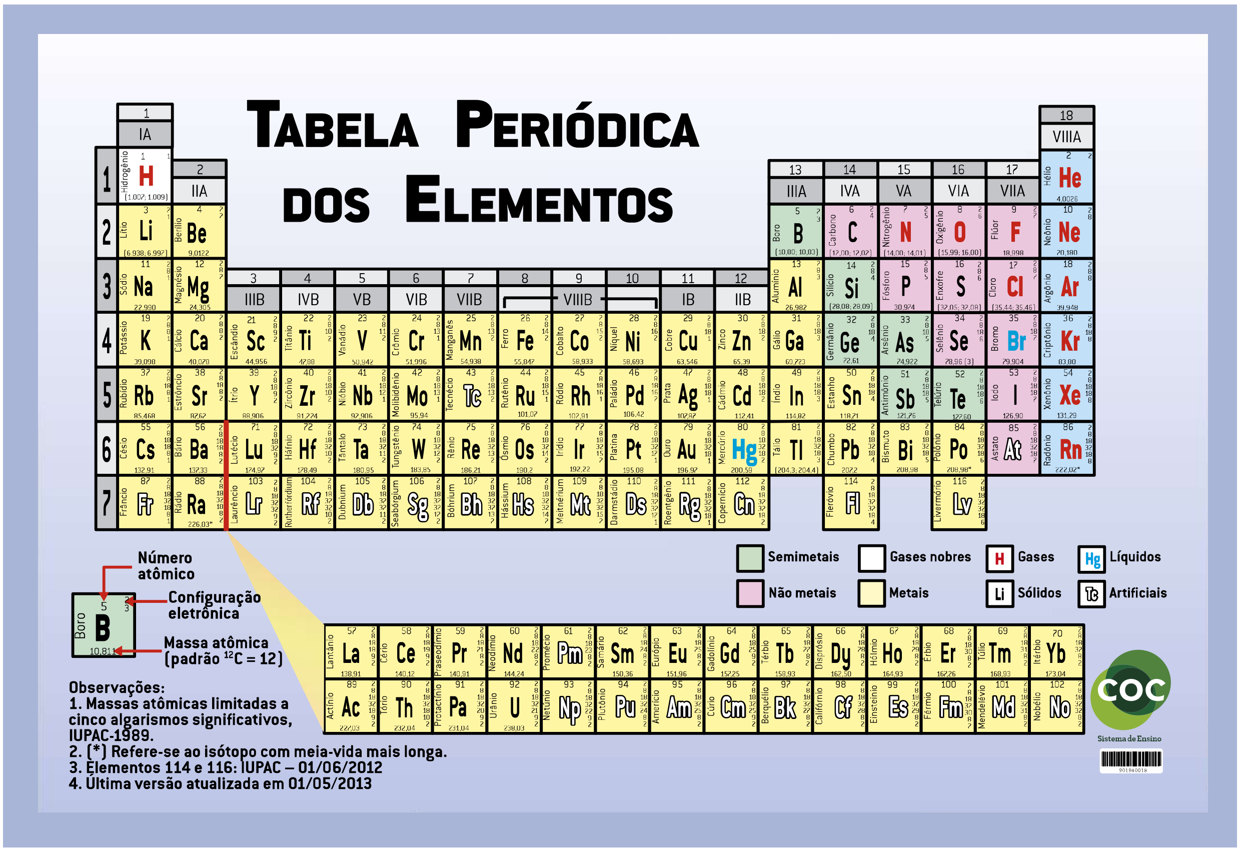


Tabela Periódica moderna

Ao longo da história, o trabalho pioneiro do filósofo grego Aristóteles (384-322 a.C.), colocando no mesmo grupo animais que apresentavam características comuns, inspirou os biólogos, com o auxílio da evolução tecnológica, a desenvolverem o ramo da Biologia conhecido como taxonomia. Em 1735, o sueco Carl von Linné, conhecido como Carlos Lineu, no seu *Systema Naturae*, fundamentou a moderna classificação biológica dos organismos da natureza.

O diagrama da página ao lado mostra a classificação biológica do gato doméstico (*Felis catus*).

Os seres vivos de uma mesma classe possuem características comuns, bem como os de uma mesma ordem, de um mesmo gênero etc. Entre outras, as palavras família (como a dos gases nobres), classe, ordem e gênero (no caso dos seres vivos) expressam o sentido de coleção que, por sua vez, traduz intuitivamente a noção de conjunto. Assim, entendemos conjunto como uma coleção de objetos, os quais são chamados de elementos ou membros, uma vez que cada um deles pertence ao conjunto. Os objetos podem ser de qualquer tipo: pessoas, animais, plantas, letras, números, outros conjuntos etc.

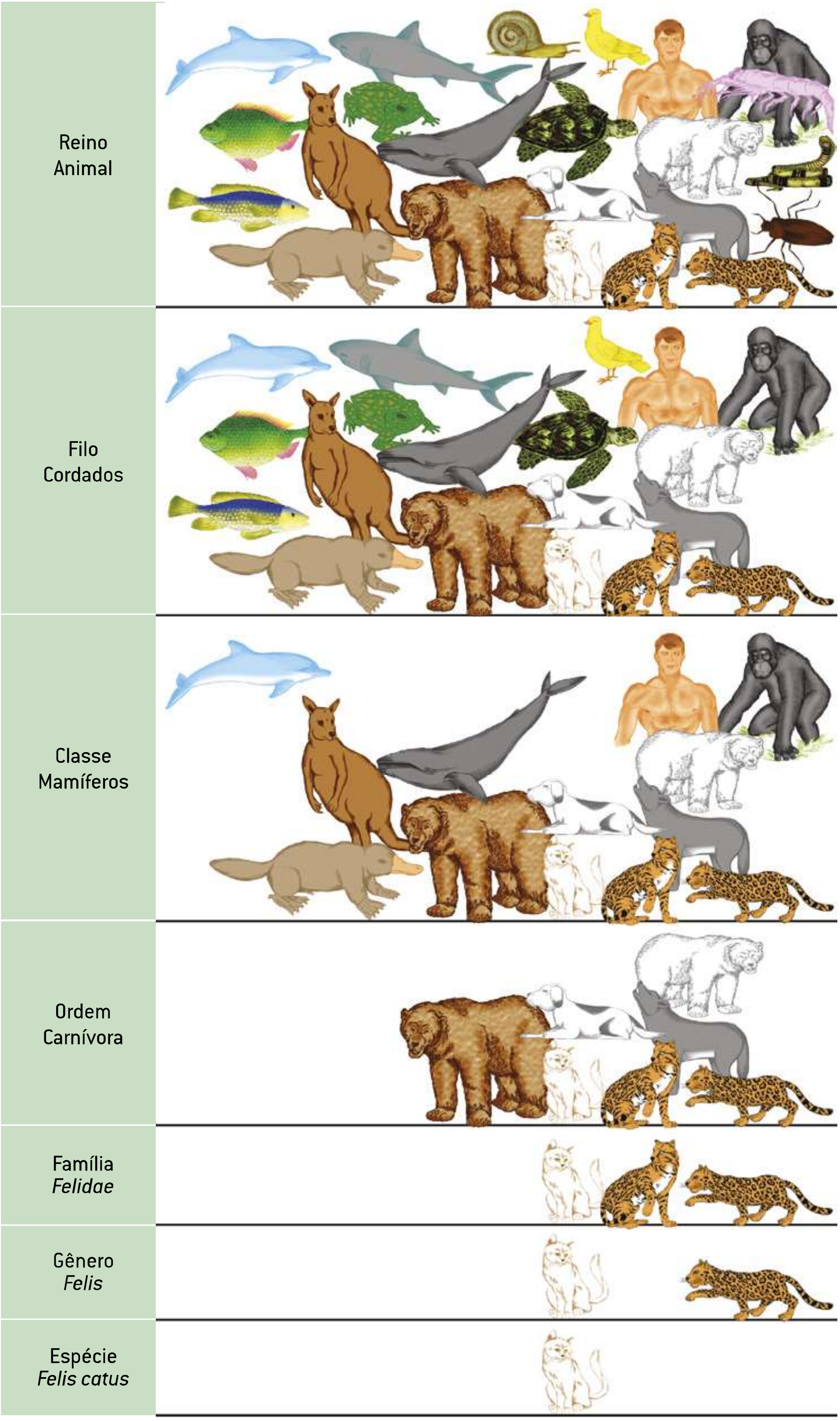
Exemplos

a. Conjunto dos habitantes de sua cidade: você é um elemento desse conjunto, isto é, você pertence a esse conjunto.

b. Um time de futebol é um conjunto em que os elementos são os jogadores do time. Dizemos, portanto, que os jogadores pertencem ao conjunto time de futebol.

c. O Sistema Solar é outro exemplo de conjunto em que os planetas são os seus elementos, pois estes planetas lhe pertencem.

EMI-15-10



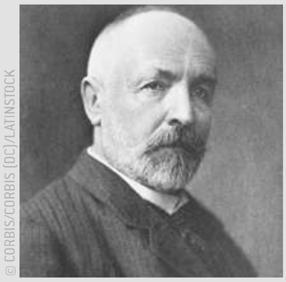
Essa classificação segue o seguinte critério: do geral (reino) para o estrito (espécie).

Século XIX – Idade áurea da matemática

O século dezenove, mais do que qualquer período precedente, mereceu ser conhecido como "idade áurea da matemática". O que se acrescentou ao assunto durante esses cem anos supera, de longe, tanto em quantidade como em qualidade, a produtividade total combinada de todas as épocas precedentes.

BOYER, Carl B. *História da matemática*. São Paulo: Edgar Blücher, 1974.

A teoria dos conjuntos, organizada pelo matemático russo Georg Cantor (1845-1918), tornou-se o elemento central na estrutura do conhecimento matemático e foi uma das respostas, no campo da matemática, ao movimento de organização do conhecimento científico que marcou o século XIX. Essa teoria busca apresentar toda a matemática por meio dos conjuntos e, para sua estruturação, foram adotados como conceitos primitivos (aqueles aceitos sem definição): conjunto, elemento de um conjunto e pertinência entre elemento e conjunto. Assim, por exemplo, a geometria euclidiana é o estudo do conjunto de pontos, tendo como conceitos primitivos as noções de ponto, reta e plano.



GEORGE CANTOR

2. Formas de representação de um conjunto

Em geral, indicaremos os conjuntos por letras latinas maiúsculas (A, B, C, D etc.) e os elementos por letras latinas minúsculas (a, b, c, d etc.).

Existem três formas de se representar um conjunto:

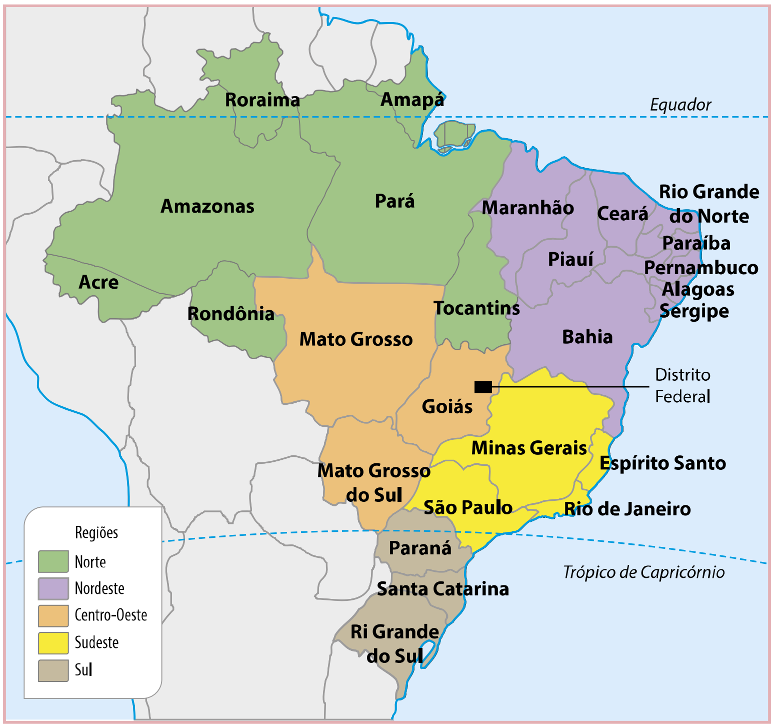
A. Enumeração

Nessa forma, os elementos são apresentados entre chaves e separados por vírgula ou ponto e vírgula.

Exemplos

a. Conjunto das vogais de nosso alfabeto: V = {a, e, i, o, u}

b. Conjunto dos nomes dos estados da região Sudeste do Brasil:
S = {São Paulo, Rio de Janeiro, Minas Gerais, Espírito Santo}



c. Conjunto dos números ímpares positivos e menores que 10:
A = {1, 3, 5, 7, 9}

d. B = {0,5; 1,4; 2,7; 3,15}

B. Representação pela propriedade de seus elementos

Nessa forma, os elementos são descritos por uma propriedade que se verifica para todos eles e somente para eles.

Representamos o conjunto A por:

A = { x | x tenha a propriedade P}

(Lê-se: "A é o conjunto de todos os elementos x, tal que x tenha a propriedade P".)

Exemplos

a. V = {x | x é vogal} é outra forma de indicar V = {a, e, i, o, u}.

b. S = {x | x é estado da região Sudeste do Brasil} é outra forma de indicar
S = {São Paulo, Rio de Janeiro, Minas Gerais, Espírito Santo}.

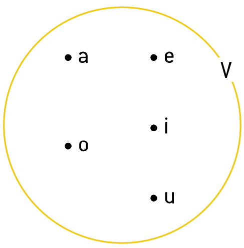
c. A = {x | x é um número ímpar, maior que zero e menor que 10} é outra forma de indicar A = {1, 3, 5, 7, 9}.

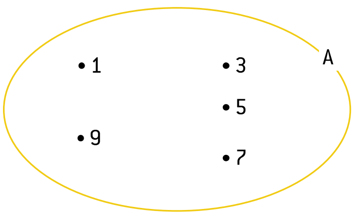
d. E = {x | x é cor da bandeira brasileira} é outra forma de indicar
E = {verde, amarelo, azul, branco}.

C. Diagrama de Venn

Nesta forma, o conjunto é representado por uma região plana, delimitada por uma linha fechada não entrelaçada. Os elementos desse conjunto são simbolizados por pontos internos a essa região.

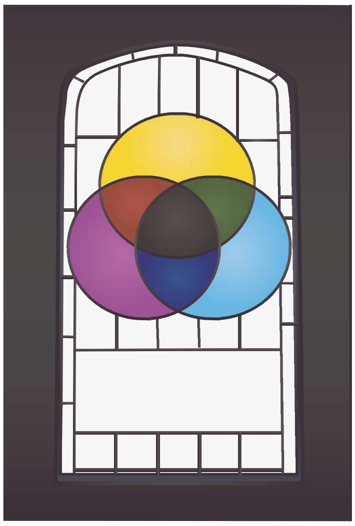
Exemplos





Esse modo visual de apresentar conjuntos, criado inicialmente por Leonhard Euler (1707-1783) e, posteriormente, ampliado e formalizado por John Venn (1834-1923), recebeu o nome de **diagrama de Venn** ou diagrama de Euler-Venn. Trata-se de uma forma bastante simples de descrever a ideia abstrata de conjuntos, facilitando a compreensão de propriedades e relações.

John Venn



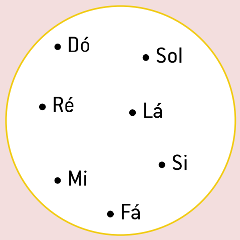
Vitral no refeitório do Caius College, Universidade de Cambrige, em homenagem a Venn e seus diagramas.

APRENDER SEMPRE 1

▶ **01.**

Na Grécia Antiga, no século V a.C., o matemático Pitágoras, por meio de uma experiência usando um monocórdio, uma corda estendida com marcas que denotavam suas principais divisões da corda, classificou sete tipos de sons, que, para ele, eram diferentes. Entre 955 e 1050 d.C., período de vida do músico italiano e monge beneditino Guido D'Arezzo, este nomeou-os em Ut, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá e San, sendo que, mais tarde, Ut foi substituído por Dó e San por Si. Enuncie as sete notas musicais nas três formas de representação de conjuntos.

Resolução
Enumeração: D = {Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si}
Propriedade: D = {d | d é uma nota musical}
Diagrama de Venn:



3. Relação de pertinência

A relação de pertinência é um dos conceitos primitivos da teoria dos conjuntos. Para indicarmos que determinado elemento x participa de um conjunto A, dizemos que o elemento x pertence ao conjunto A e escrevemos:

$x \in A$ (lê-se: x pertence a A.)

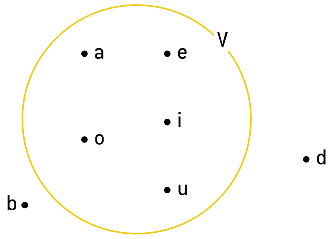
Quando o elemento x não pertence ao conjunto A, escrevemos:

$x \notin A$ (lê-se: x não pertence a A.)

Exemplos

a. Se A = {1, 3, 5, 7, 9}, temos:
3 é um elemento de A: $3 \in A$
7 pertence a A: $7 \in A$
2 não é um elemento de A: $2 \notin A$
8 não pertence a A: $8 \notin A$

b. Para o conjunto das vogais, representado a seguir por um diagrama de Venn, temos:

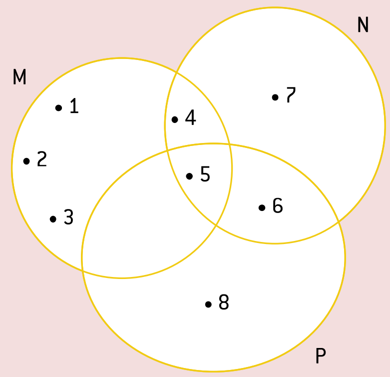


$a \in V$, $u \in V$, $b \notin V$, $d \notin V$

APRENDER SEMPRE 2

01.

Considerando os conjuntos M, N e P do diagrama a seguir, complete com $\in$ ou $\notin$ cada item.



a. 1____P
b. 5____M
c. 6____N
d. 6____P
e. 8____N
f. 2____M

Resolução

De acordo com o diagrama de Venn apresentado, temos que:

M = {1, 2, 3, 4, 5}, N = {4, 5, 6, 7} e P = {5, 6, 8}, assim:

a. $1 \notin P$
b. $5 \in M$
c. $6 \in N$
d. $6 \in P$
e. $8 \notin N$
f. $2 \in M$

4. Conjuntos iguais

Dizemos que dois conjuntos, A e B, são iguais (A = B) quando eles possuem os mesmos elementos, isto é, todo elemento de A também pertence a B e todo elemento de B também pertence a A.

Exemplos

a. Seja A o conjunto das vogais da palavra crase: A = {a, e}
Seja B o conjunto das vogais da palavra tela: B = {e, a}
Assim, A = B, pois A e B possuem os mesmos elementos, embora escritos em ordem diferente.

b. Seja C o conjunto das letras da palavra em: C = {e, m}
Seja D o conjunto das letras da palavra meme: D = {m, e, m, e}
Assim, C = D, pois C e D possuem os mesmos elementos.
Como {e, m} = {m, e, m, e}, não repetimos elementos em um conjunto.

Se dois conjuntos, A e B, não são iguais, indicamos $A \neq B$ (lê-se: A é diferente de B.). Isso acontece quando existe pelo menos um elemento de um dos conjuntos que não pertence ao outro.

Exemplos

c. $\{m, n, r\} \neq \{m, n, p, q\}$

d. $\{2, 4, 6\} \neq \{2, 4, 6, 8\}$

APRENDER SEMPRE 3

▶ **01.**

Sejam x e y números tais que os conjuntos $\{1, 4, 5\}$ e $\{x, y, 1\}$ sejam iguais. Então, podemos afirmar que:

a. $x = 4$ e $y = 5$

b. $x \neq 4$

c. $y \neq 4$

d. $x + y = 9$

e. $x < y$

Resolução

O elemento 1 aparece nos dois conjuntos, portanto temos duas possibilidades:

$x = 4$ e $y = 5$ ou $x = 5$ e $y = 4$ – Em qualquer um dos casos, a soma dos valores de x e y resulta em 9, ou seja, $x + y = 9$.

Resposta

D

5. Conjuntos notáveis

Determinadas particularidades de alguns conjuntos fazem com que eles recebam nomenclatura específica.

A. Conjunto unitário

Denominamos de conjunto unitário aquele que possui apenas um elemento.

Exemplos

a. Conjunto do(s) estado(s) brasileiro(s) que faz(em) fronteira com a Colômbia:

D = {Amazonas}

b. $T = \{x \mid x$ é satélite natural da Terra$\} = \{$Lua$\}$

c. $S = \{x \mid x$ é raiz da equação $2x + 3 = 15\} = \{6\}$

B. Conjunto vazio

Denominamos de conjunto vazio aquele que não possui nenhum elemento. Para representá-lo, usamos o símbolo $\varnothing$ (letra de origem norueguesa) ou { }.

Exemplos

a. Conjunto dos estados brasileiros que fazem fronteira com o Equador: $F = \varnothing$

b. $V = \{x \mid x$ é número e $x = x + 1\} = \{\ \}$

C. Conjunto universo

Quando interpretamos fenômenos naturais ou sociais em situações de estudo em que a linguagem dos conjuntos pode ser usada, procuramos estabelecer o conjunto formado por todos os elementos com os quais trabalharemos em cada uma delas. Esse conjunto é denominado conjunto universo do estudo em questão e, usualmente, é representado por **U**.

Exemplos

a. Considere a lista a seguir.

As dez maiores cidades do Brasil e suas respectivas populações

1. São Paulo (São Paulo): 11 244 369 habitantes
2. Rio de Janeiro (Rio de Janeiro): 6 323 037 habitantes
3. Salvador (Bahia): 2 676 606 habitantes
4. Brasília (Distrito Federal): 2 562 963 habitantes
5. Fortaleza (Ceará): 2 447 409 habitantes
6. Belo Horizonte (Minas Gerais): 2 375 444 habitantes
7. Manaus (Amazonas): 1 802 525 habitantes
8. Curitiba (Paraná): 1 746 896 habitantes
9. Recife (Pernambuco): 1 536 934 habitantes
10. Porto Alegre (Rio Grande do Sul): 1 409 939 habitantes

IBGE: Censo 2010

Disponível em: <http://www.suapesquisa.com/geografia/maiores_cidades_do_brasil.htm>. Acesso em: 25 abr. 2013.

Com base nessas informações, represente na forma de enumeração o conjunto A = {cidades brasileiras com mais de dois milhões de habitantes}.

- Se considerarmos U = { cidades brasileiras}, teremos: A = { São Paulo, Rio de Janeiro, Salvador, Brasília, Fortaleza, Belo Horizonte}.
- Se considerarmos U = { cidades brasileiras da região Sudeste}, teremos: A = { São Paulo, Rio de Janeiro, Belo Horizonte}.
- Se considerarmos U = { cidades brasileiras da região Nordeste}, teremos: A = { Salvador, Fortaleza}.

b. No estudo da Geometria Plana o conjunto universo é o conjunto dos pontos de um plano.

c. Reescreva o conjunto $S = \{x \mid x$ é solução da equação $3x + 6 = 0\}$ enumerando seus elementos.

- Se considerarmos U o conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$), teremos $S = \varnothing$.
- Se considerarmos U o conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$), teremos $S = \{-2\}$.

6. Conjuntos finito e infinito

A. Conjunto finito

Dizemos, intuitivamente, que um conjunto é finito se ele for vazio ou se seus elementos puderem ser contados, um a um, e se essa contagem chegar ao final. Indicamos por n(A) o número de elementos de um conjunto finito A.

Exemplos

a. Conjunto das letras de nosso alfabeto, conforme Acordo Ortográfico de 1990 (com as letras k, w e y): $A = \{a, b, c, d, \ldots, z\}$ e $n(A) = 26$.

b. $V = \{x \mid x \text{ é número e } x = x + 1\} = \varnothing$ e $n(V) = n(\phi) = 0$.

B. Conjunto infinito

A todo conjunto não finito denominamos conjunto infinito.

Exemplos

a. Conjunto dos números naturais múltiplos de 5: $M = \{0, 5, 10, 15, \ldots\}$

b. $P = \{x \mid x \text{ é número natural primo}\} = (2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$

7. Subconjunto: a relação de inclusão

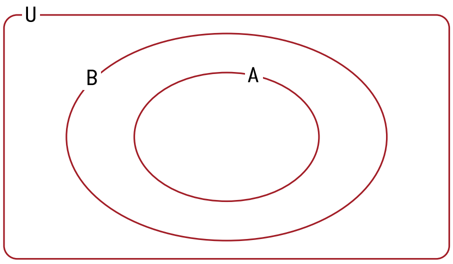
Um dos sistemas de classificação biológica divide os organismos da natureza em reinos. Cada reino é constituído por grande diversidade de organismos, com poucas características comuns a todos. A gravura a seguir apresenta diferentes seres do reino Animal.

A. GRAGERA/SCIENCE PHOTO LIBRARY/SPL DC/LATINSTOCK

Com base nessa classificação biológica, considerando o conjunto universo U formado por todos os seres vivos, podemos conceber o conjunto B dos animais e, a partir deste, o conjunto A das aves. Como todo elemento de A é também elemento de B, dizemos que A é subconjunto de B ou que A é parte de B e indicamos:

$A \subset B$ (lê-se: A está contido em B.) ou, ainda, $B \supset A$ (lê-se: B contém A.)

Em diagrama, temos:



Denominamos o símbolo $\subset$ de sinal de inclusão e $A \subset B$ de relação de inclusão.

Exemplos

a. Sendo $A = \{x \mid x$ é estado da região Centro-Oeste do Brasil$\}$ e
$B = \{x \mid x$ é estado do Brasil$\}$, temos: $A \subset B$.

b. $\{1, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$

c. $\{2, 4, 8\} \subset \{2, 4, 8\}$

d. $\{a\} \subset \{a, b, c\}$

Se um conjunto A possuir pelo menos um elemento que não pertença a um conjunto B, dizemos que A não é subconjunto de B ou que A não é parte de B e indicamos:

$A \not\subset B$ (lê-se: A não está contido em B.) ou, ainda, $B \not\supset A$ (lê-se: B não contém A.).

Exemplos

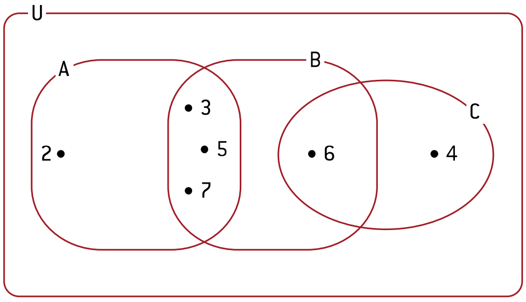
Sendo $A = \{2, 3, 5, 7\}$, $B = \{3, 5, 6, 7\}$ e $C = \{4, 6\}$, temos:

a. $A \not\subset B$, pois existe o elemento 2 em A que não pertence a B.

b. $C \not\subset B$, pois $4 \in A$ e $4 \notin B$.

c. $C \not\subset A$, pois os seus elementos, 4 e 6, não são elementos de A.

Em diagrama, temos:



A. Propriedades da inclusão

Para quaisquer três conjuntos A, B e C, são verdadeiras as seguintes propriedades:

P1. O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

$\varnothing \subset A, \forall A$ (O símbolo $\forall$ lê-se "qualquer que seja".)

Se admitirmos que $\varnothing \not\subset A$, então o conjunto vazio deve possuir pelo menos um elemento que não pertença ao conjunto A, o que é um absurdo, pois o vazio não possui nenhum elemento. Portanto, a sentença $\varnothing \subset A$ é verdadeira.

Exemplos

a. $\varnothing \subset \{2, 4, 6\}$

b. $\varnothing \subset \{a, b, c, d\}$

c. $\varnothing \subset \{1\}$

d. $\varnothing \subset \varnothing$

P2. Reflexiva

Todo conjunto é subconjunto dele mesmo.

$A \subset A, \forall A$

Exemplos

a. $\{2, 4, 6\} \subset \{2, 4, 6\}$

b. $\{a, b\} \subset \{a, b\}$

c. $\{1\} \subset \{1\}$

d. $\varnothing \subset \varnothing$

EMI-15-10

P3. Antissimétrica
Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$.

P4. Transitiva
Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

APRENDER SEMPRE 4

01.

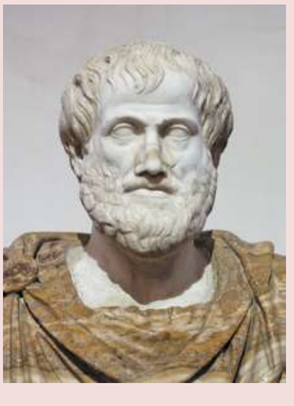
Seja $A = \{1, 2, 3\}$, classifique como falsa (F) ou verdadeira (V) cada uma das seguintes afirmações.

a. $1 \in A$
b. $5 \notin A$
c. $3 \in A$
d. $\{3\} \in A$
e. $\{3\} \subset A$
f. $\{2, 1\} \subset A$
g. $\{1, 2, 4\} \not\subset A$
h. $A \subset A$
i. $\varnothing \subset A$

Resolução
Primeiramente, os elementos de A são 1, 2 e 3.
a. Verdadeira, pois 1 é elemento de A.
b. Verdadeira, pois 5 não é elemento de A.
c. Verdadeira, pois 3 é elemento de A.
d. Falsa, pois $\{3\}$ não é elemento de A, e sim um subconjunto de A.
e. Verdadeira, pois como 3 é elemento de A, logo $\{3\}$ é um subconjunto de A.
f. Verdadeira, pois 1 e 2 são elementos de A, logo $\{1, 2\}$ é um subconjunto de A e, assim, $\{1, 2\}$ está contido em A.
g. Verdadeira, pois 1 e 2 são elementos de A, mas 4 não é elemento de A, assim, $\{1, 2, 4\}$ não é um subconjunto de A.
h. Verdadeira, pois qualquer conjunto está contido nele próprio.
i. Verdadeira, pois o conjunto vazio está sempre contido em qualquer conjunto.

02.

Os trabalhos iniciais sobre Lógica são creditados ao filósofo grego Aristóteles (384- 322 a.C.), para quem o raciocínio dedutivo se verifica, essencialmente, por silogismos.



MUSEU NACIONAL ROMANO, ROMA, ITÁLIA.

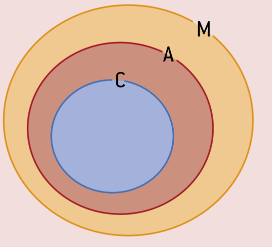
Os silogismos aristotélicos são argumentos constituídos por duas proposições (premissas), nas quais nos baseamos para avaliar uma terceira proposição, a conclusão.

Considere o argumento:

"Todos os animais são mortais. Os cachorros são animais. Logo, os cachorros são mortais."

a. Justifique a validade desse argumento com a construção do diagrama de Venn.
b. Escreva as correspondentes relações de inclusão.

Resolução
a. Sendo A o conjunto dos animais, C o conjunto dos cachorros e M o conjunto dos mortais, temos o diagrama:



b. Com base nesse diagrama, temos:
$C \subset A$; $A \subset M$ e $C \subset M$

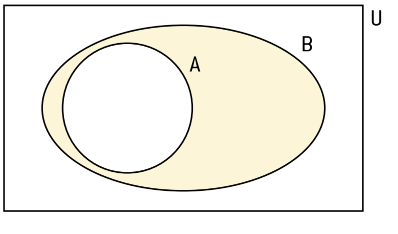
B. Conjunto complementar

Dentre os significados da palavra complementar, temos a palavra completar, o que nos permite entender conjunto complementar de um conjunto, A, em relação a um outro conjunto, B, como o conjunto dos elementos que faltam em A para que ele seja igual a B. Dizemos, então, que o conjunto complementar do conjunto dos rapazes em relação ao conjunto dos alunos de sua sala de aula é o conjunto das garotas.

Dados dois conjuntos, A e B, tais que $A \subset B$, chamamos de complementar de A em relação a B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a B e não pertencem a A, indicado por C_B^A. De modo mais formal, escrevemos:

Sendo $A \subset B$, temos:
$C_B^A = \{x \mid x \in B \text{ e } x \notin A\}$

Em diagrama, temos:



(C_B^A está representado por toda a região colorida.)

Exemplos
a. Se $A = \{2, 3, 5\}$ e $B = \{1,2, 3, 4, 5, 6\}$, temos $A \subset B$. Então:
$C_B^A = \{1, 4, 6\}$

b. Se $A = \varnothing$ e $B = \{a, b, c\}$, temos $A \subset B$. Então:
$C_B^A = \{a, b, c\} = B$

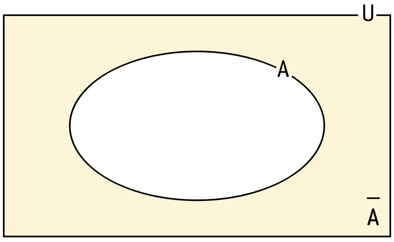
c. Para todo conjunto A, temos $A \subset A$. Então:
$C_A^A = \varnothing$

d. Se $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{3, 5, 7, 9\}$, temos $A \not\subset B$. Então, diremos que não existe C_B^A.

B.1. Complementar de um conjunto A em relação a um universo U

Quando estudamos uma epidemia em uma população, temos para o universo U o conjunto de todos os indivíduos dessa população e, considerando nela o conjunto A de todos os indivíduos doentes, entendemos que o conjunto dos indivíduos sadios é o complementar de A em relação a U. Em situações como essa, a indicação C_U^A é usualmente substituída por $\overline{A}$ ou A' ou, ainda, A^C.

Em diagrama, temos:



($\overline{A}$ está representado por toda a região colorida.)
$\overline{A}$ (lê-se: "A barra" ou "não A".)
A' (lê-se "A linha".)
A^C (lê-se: "A complementar".)
$\overline{A} = A' = A^C = \{x | x \in U \text{ e } x \notin A\}$

APRENDER SEMPRE 5

▶ **01.**

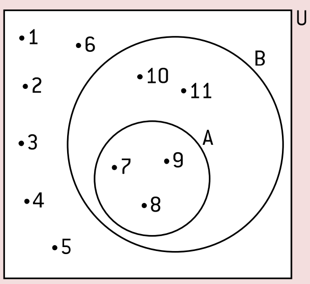
Dados os conjuntos $A = \{7, 8, 9\}$, $B = \{7, 8, 9, 10, 11\}$ e o conjunto universo $U = \{x \mid x$ é número inteiro positivo menor do que $12\}$, determine:

a. C_B^A
b. C_A^B
c. $\overline{B}$
d. $\overline{A}$

Resolução

Como todos os elementos de A pertencem ao conjunto B, temos $A \subset B$, ou seja, A é um subconjunto de B. Além disso, temos como conjunto universo
$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$.

Representando os conjuntos dados no enunciado em um diagrama, temos:



Assim:
a. $C_B^A = \{10, 11\}$
b. $\nexists\ C_A^B$ pois, $B \not\subset A$
c. $\overline{B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
d. $\overline{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11\}$
(O símbolo $\nexists$ lê-se: não existe.)

C. Conjunto de conjuntos

Existem situações em que os elementos de um conjunto são também conjuntos. Observe que, em um campeonato de futebol, temos um conjunto de times em que cada time é um conjunto de jogadores.

Exemplo

O conjunto $A = \{\{5\}, \{1, 3\}, \{2, 4, 7\}\}$ possui três elementos, que são os conjuntos $\{5\}$, $\{1, 3\}$ e $\{2, 4, 7\}$. Assim, é correto dizer:
$\{5\} \in A$;
$\{2, 4, 7\} \in A$; e
$\{\{5\}, \{1, 3\}\} \subset A$.
No entanto, são falsas as afirmações:
$5 \in A$ (pois 5 não é um elemento de A);
$3 \in A$ (pois 3 não é um elemento de A); e
$\{2, 4, 7\} \subset A$ (pois 2, 4 e 7 não são elementos de A).

D. Conjunto das partes. Número de elementos do conjunto das partes

Denominamos de conjunto das partes de um conjunto A o conjunto formado por todos os subconjuntos de A, os quais indicamos por P(A).

Como, para todo conjunto A, $\varnothing \subset A$ e $A \subset A$, então os conjuntos $\varnothing$ e A serão sempre elementos de P(A).

Exemplo

Consideremos o conjunto $A = \{3, 5, 7\}$. Para determinar todos os seus subconjuntos, iniciamos pelo conjunto vazio e formamos:

- subconjuntos com um elemento: $\{3\}$, $\{5\}$ e $\{7\}$;
- subconjuntos com dois elementos: $\{3, 5\}$, $\{3, 7\}$ e $\{5,7\}$;
- subconjuntos com três elementos: $\{3, 5,7\}$;

Assim:
$P(A) = \{\varnothing, \{3\}, \{5\}, \{7\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{5,7\}, \{3, 5,7\}\}$

Consideremos a tabela a seguir:

Conjunto	$A = \{3\}$	$B = \{3, 5\}$	$C = \{3, 5, 7\}$
Número de elementos do conjunto	$n(A) = 1$	$n(B) = 2$	$n(C) = 3$
Conjunto das partes	$P(A) = \{\varnothing, \{3\}\}$	$P(B) = \{\varnothing, \{3\}, \{5\}, \{3, 5\}\}$	$P(C) = \{\varnothing, \{3\}, \{5\}, \{7\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{3,7\}, \{5, 7\}, \{3, 5,7\}\}$
Número de elementos do conjunto das partes	$n[P(A)] = 2 = 2^1$	$n[P(B)] = 4 = 2^2$	$n[P(C)] = 8 = 2^3$

Particularmente, para o conjunto vazio, temos:
$n(\varnothing) = 0$; $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$ e $n[P(\varnothing)] = 1 = 2^0$

Com base nas informações da tabela quanto ao número de elementos do conjunto das partes de um conjunto relativamente ao número de elementos do conjunto considerado, podemos afirmar que, se um conjunto A possuir n elementos, ele terá 2^n subconjuntos, o que pode ser rigorosamente provado.

Assim: $n[P(A)] = 2^{n(A)}$

8. Operações entre conjuntos

Quando trabalhamos com números, é comum a realização de operações tais como a adição, a multiplicação ou, ainda, a potenciação, entre outras. Analogamente, novos conjuntos podem ser obtidos como resultado de operações efetuadas entre dois conjuntos dados. São elas, basicamente, a união, a intersecção e a diferença entre conjuntos de um universo U.

A. União (ou reunião) de conjuntos

Consideremos as situações descritas a seguir:

I. Dois amigos, Eduardo e Gisele, estão programando uma atividade para o fim de semana. Eles pretendem ir ao cinema **ou** ao teatro, porém os eventos desses locais ocorrerão no mesmo horário.

II. Para ampliar o quadro de professores do Departamento de Ciências Humanas, uma escola convidou, para serem entrevistados, professores graduados em Filosofia **ou** em Ciências Sociais. Dentre aqueles que compareceram, foram entrevistados:

- Ana – graduada apenas em Filosofia;
- Bruno – graduado apenas em Ciências Sociais; e
- Carlos – graduado em Filosofia e também em Ciências Sociais.

Na situação (I), entendemos que a proposta "ir ao cinema" exclui a proposta "ir ao teatro" e vice-versa. Nesse contexto, o conectivo **ou** traduz ideia de exclusão.

Na situação (II), ao interpretarmos "professores graduados em Filosofia **ou** em Ciências Sociais", entendemos que não estão impedidos de participar das entrevistas todos os professores que possuem as duas graduações solicitadas. Nesse contexto, o conectivo **ou** traduz ideia de inclusão. É com esse sentido que devemos entender o **ou** usado para definir a união de conjuntos.

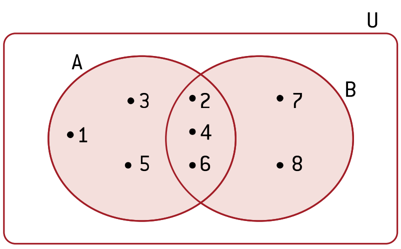
Dados os conjuntos A e B, subconjuntos de um universo U, a união ou reunião de A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A **ou** a B, indicado por $A \cup B$ (lê-se: A união B.).

De modo mais formal, escrevemos:

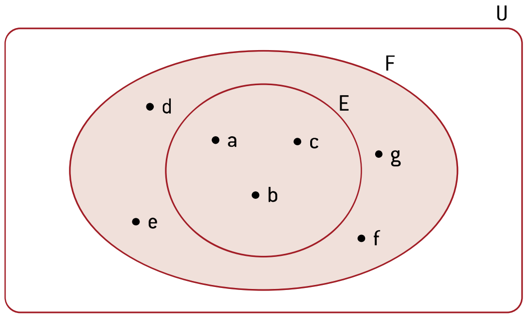
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Exemplos

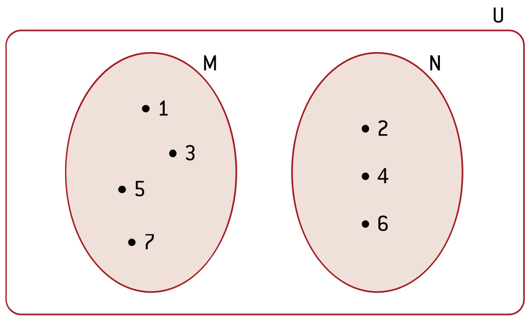
a. Para os conjuntos A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} e B = {2, 4, 6, 7, 8}, temos:
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
A união de A e B está sombreada no diagrama:



b. Para os conjuntos E = {a, b, c} e F = {a, b, c, d, e, f, g}, temos: $E \cup F = \{a, b, c, d, e, f, g\} = F$.
A união de E e F está sombreada no diagrama:



c. Para os conjuntos M = {1, 3, 5, 7} e N = {2, 4, 6}, temos: $M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
A união de M e N está sombreada no diagrama:



d. Sendo A = { x | x é estado da região Centro-Oeste do Brasil} e B = { x | x é estado da região Sul do Brasil}, temos:
$A \cup B$ = {Mato Grosso, Goiás, Mato Grosso do Sul, Paraná, Santa Catarina, Rio Grande do Sul}

A.1. Propriedades da união de conjuntos

Dados os conjuntos A, B e C quaisquer, subconjuntos de um universo U, são verdadeiras as seguintes propriedades:

- $A \cup A = A$ (idempotente)
- $A \cup \varnothing = A$ (elemento neutro)
- $A \cup B = B \cup A$ (comutativa)
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$ (associativa)
- Se $A \subset B$, então $A \cup B = B$ e, se $A \cup B = B$, então $A \subset B$.

B. Intersecção de conjuntos

Na tabela a seguir, apresentamos alguns quadriláteros convexos e suas características.

	Tem os quatro lados congruentes	Tem os quatro ângulos internos congruentes
Losango	X	
Retângulo		X
Quadrado	X	X

Analisando os dados mostrados, temos que, para ser caracterizado como quadrado, o quadrilátero convexo deve ter os quatro lados congruentes e os quatro ângulos internos congruentes. Nesse contexto, o conectivo **e** traduz a ideia de simultaneidade. É com esse sentido que devemos entender o **e** usado para definir a intersecção de conjuntos.

Dados o conjuntos A e B, subconjuntos de um universo U, a intersecção de A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e a B, indicado por $A \cap B$ (lê-se: A inter B.).

De modo mais formal, escrevemos:

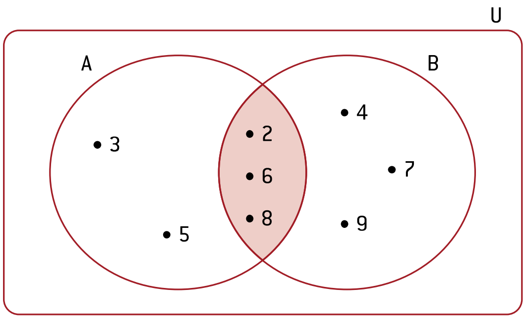
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Quando dois conjuntos, A e B, não têm elemento em comum, isto é, $A \cap B = \varnothing$, dizemos que A e B são conjuntos disjuntos.

Exemplos

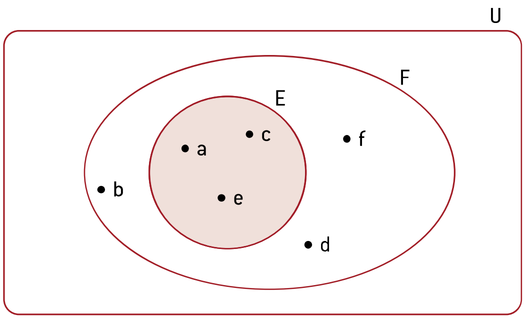
a. Para os conjuntos $A = \{2, 3, 5, 6, 8\}$ e $B = \{2, 4, 6, 7, 8, 9\}$, temos: $A \cap B = \{2, 6, 8\}$.

A intersecção de A e B está sombreada no diagrama:



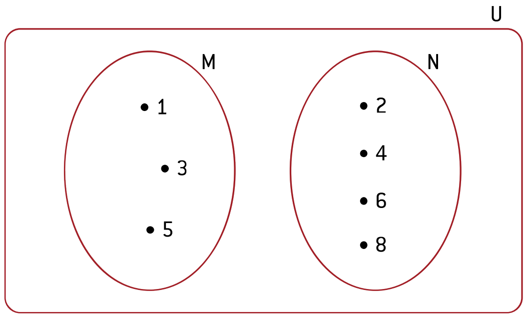
b. Para os conjuntos $E = \{a, c, e\}$ e $F = \{a, b, c, d, e, f\}$, temos: $E \cap F = \{a, c, e\} = E$.

A intersecção de E e F está sombreada no diagrama.



c. Para os conjuntos $M = \{1, 3, 5\}$ e $N = \{2, 4, 6, 8\}$, temos: $M \cap N = \varnothing$.

Como M e N são disjuntos, não temos região sombreada no diagrama.



d. Sendo $A = \{x \mid x$ é número natural par$\}$ e $B = \{x \mid x$ é número natural primo$\}$, temos:
$A \cap B = \{0, 2, 4, 6, 8, ...\} \cap \{2, 3, 5, 7, 11, ...\} = \{2\}$.

B.1. Propriedades da intersecção de conjuntos

Dados o conjuntos A, B e C quaisquer, subconjuntos de um universo U, são verdadeiras as seguintes propriedades:

- $A \cap A = A$ (idempotente)
- $A \cap U = A$ (elemento neutro)
- $A \cap B = B \cap A$ (comutativa)
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$ (associativa)
- Se $A \subset B$, então $A \cap B = A$ e, se $A \cap B = A$, então $A \subset B$

B.2. Propriedades envolvendo a união e a intersecção de conjuntos

Dados os conjuntos A, B e C quaisquer, subconjuntos de um universo U, são verdadeiras as seguintes propriedades:

- $A \cup (A \cap B) = A$
- $A \cap (A \cup B) = A$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(distributiva da união em relação à intersecção)

- $A (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(distributiva da intersecção em relação à união)

C. Diferença de conjuntos

Dados os conjuntos A e B, subconjuntos de um universo U, a diferença de A e B, nessa ordem, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e não pertencem a B, indicado por $A - B$ (lê-se: A menos B).

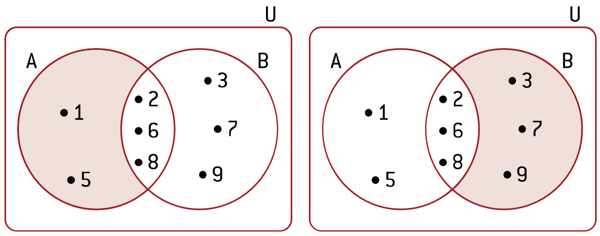
De modo mais formal, escrevemos:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Exemplos

a. Para os conjuntos $A = \{1, 2, 5, 6, 8\}$ e $B = \{2, 3, 6, 7, 8, 9\}$, temos: $A - B = \{1, 5\}$ e $B - A = \{3, 7, 9\}$.

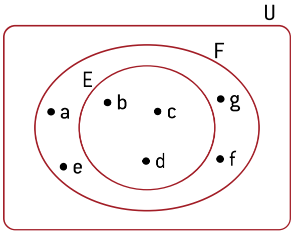
As diferenças $A - B$ e $B - A$ estão sombreadas nos diagramas.



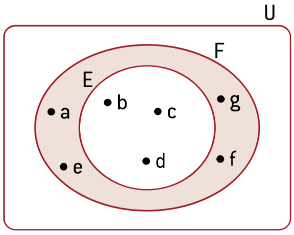
A – B B – A

EMI-15-10

b. Para os conjuntos $E = \{b, c, d\}$ e $F = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, temos:
$E - F = \varnothing$ e $F - E = \{a, e, f, g\}$.
A diferença $F - E$ está sombreada no diagrama.

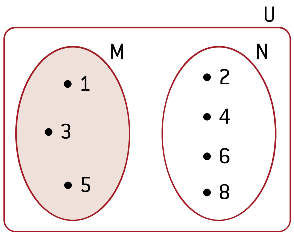


E – F

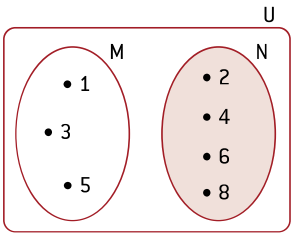


F – E

c. Para os conjuntos $M = \{1, 3, 5\}$ e $N = \{2, 4, 6, 8\}$, temos:
$M - N = \{1, 3, 5\} = M$ e $N - M = \{2, 4, 6, 8\} = N$.
As diferenças $M - N$ e $N - M$ estão sombreadas nos diagramas.



M – N



N – M

C.1. Relação entre complementação e diferença de conjuntos

Consideremos os conjuntos $A = \{1, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, enfatizando que $A \subset B$. Para esses conjuntos, temos:

I. $C_B^A = \{2, 6\}$
II. $B - A = \{2, 6\}$

Portanto, se $A \subset B$, então $C_B^A = B - A$.

Notemos ainda que não existe C_A^B, pois $B \not\subset A$, mas $A - B = \varnothing$.

APRENDER SEMPRE 6

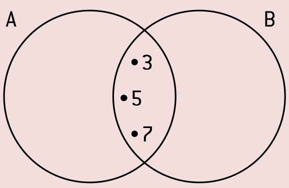
▶ **01.**

Considerando os conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $B = \{2, 3, 5, 7\}$, determine:

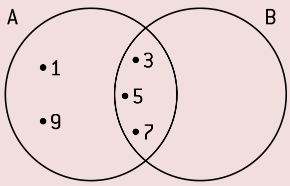
a. $A \cup B$
b. $A \cap B$
c. $A - B$
d. $B - A$

Resolução

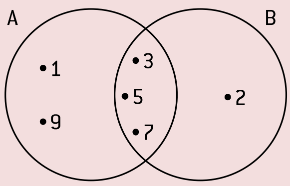
Os conjuntos A e B possuem elementos comuns, representados no diagrama a seguir.



Representando os outros elementos de A, temos:



Representando os outros elementos de B, temos:



Assim, concluímos que:

a. $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$
b. $A \cap B = \{3, 5, 7\}$
c. $A - B = \{1, 9\}$
d. $B - A = \{2\}$

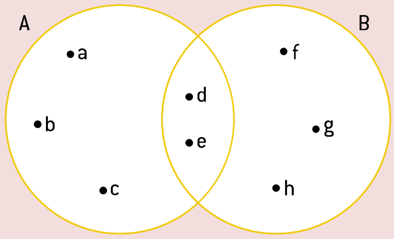
▶ **02. Vunesp**

Suponhamos que:
$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$
$A \cap B = \{d, e\}$
$A - B = \{a, b, c\}$
Então:

a. $B = \{f, g, h\}$
b. $B = \{d, e, f, g, h\}$
c. $B = \{a, b, c, d, e\}$
d. $B = \{d, e\}$
e. $B = \varnothing$

Resolução

I. Como os conjuntos A e B possuem elementos comuns, inicialmente representamos os elementos de $A \cap B$ no diagrama a seguir.
II. A seguir, representamos os elementos de $A - B$, que são os que pertencem apenas ao conjunto A.
III. Finalmente, conhecendo os elementos de $A \cup B$, identificamos e representamos os elementos que pertencem apenas ao conjunto B.



Assim: $B = \{d, e, f, g, h\}$.

Resposta

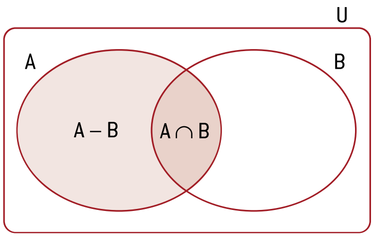
B

9. Número de elementos de conjuntos finitos

Na resolução de problemas que envolvem operações entre conjuntos, encontraremos situações em que o interesse é o número de elementos dos conjuntos resultantes dessas operações.

A. Número de elementos da diferença de conjuntos

Consideremos os conjuntos A e B, subconjuntos de um universo U, tais que:

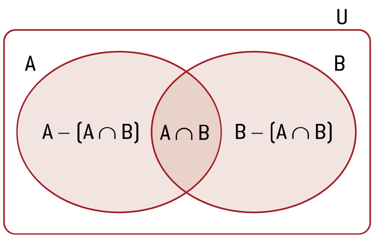


Assim: $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$.

Caso $A \cap B = \varnothing$, então $n(A - B) = n(A)$, pois $n(A \cap B) = 0$.

B. Número de elementos da união e da intersecção de conjuntos

Consideremos os conjuntos A e B, subconjuntos de um universo U, tais que:

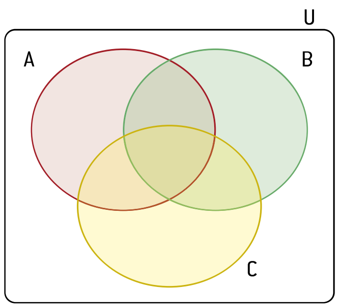


Notemos que: $n(A \cup B) = n[A - (A \cap B)] + n(A \cap B) + n[B - (A \cap B)]$

$n(A \cup B) = n(A) - n(A \cap B) + n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B)$

Logo, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

Para os conjuntos A, B e C, subconjuntos de um universo U, tais como:



é verdadeiro afirmar que:

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$.

APRENDER SEMPRE 7

▶ **01.**

Antígeno é uma proteína que pode ser encontrada no sangue, mais especificamente nos glóbulos vermelhos, e que determina o tipo sanguíneo de uma pessoa. Existem dois tipos de antígenos: A e B. Se uma pessoa possui somente o antígeno A, seu sangue é do tipo A. Se tem somente o antígeno B, é do tipo B. Se tiver ambos, ela será do tipo AB e, se não tiver nenhum deles, o sangue dela será do tipo O.

Num grupo de 70 pessoas, verifica-se que 35 apresentam o antígeno A; 30, o antígeno B; e 20, os dois antígenos.

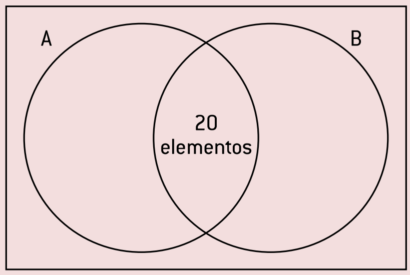
a. Quantas pessoas têm sangue do tipo A?

b. Quantas pessoas têm sangue do tipo O?

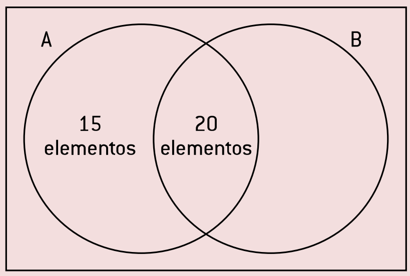
Resolução

Sejam A e B, respectivamente, os conjuntos das pessoas que apresentam os antígenos A e B, e U o conjunto das 70 pessoas do grupo citado.

a. Como os conjuntos A e B possuem elementos comuns, temos o diagrama a seguir.



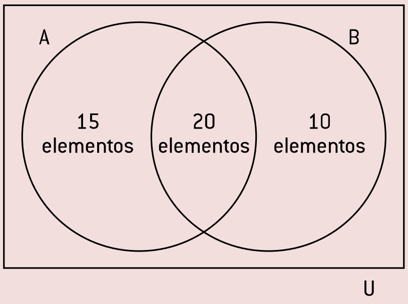
Como 35 pessoas apresentam o antígeno A, das quais 20 também têm o antígeno B, então apenas 15 possuem somente o antígeno A.



Portanto, podemos concluir que 15 pessoas têm sangue do tipo A.

b. Como 30 pessoas apresentam o antígeno B, das quais 20 também têm o antígeno A, então apenas 10 possuem somente o antígeno B.

EMI-15-10



Calculando a quantidade de pessoas que possuem pelo menos um dos dois antígenos, temos:

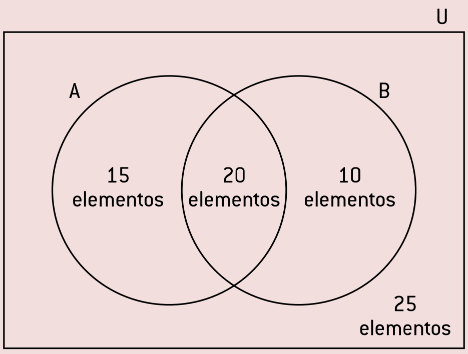
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$n(A \cup B) = 35 + 30 - 20$

Logo, $n(A \cup B) = 45$.

Lembrando-se de que o grupo citado tem 70 pessoas, a quantidade das que apresentam sangue do tipo O é dada por:

$n(O) = n(U) - n(A \cup B) = 70 - 45 = 25$



Resposta

a. 15 pessoas têm sangue do tipo A.

b. 25 pessoas têm sangue do tipo O.

▶ **02.**

Num parque, havia apenas 8 crianças loiras. Havia exatamente 16 meninos e, dentre as meninas, 12 não eram loiras. No total, havia 33 crianças. Quantas meninas havia no parque?

Resolução

Como não há intersecção entre o conjunto dos homens e o das mulheres (os conjuntos são disjuntos), então, para melhor entendimento da situação, montaremos uma tabela. Preenchendo-a de acordo com os dados, temos:

– No parque, havia apenas 8 crianças loiras.

	Loiras	Não loiras	Total
Meninos			
Meninas			
Total	8		

– Havia exatamente 16 meninos.

– Dentre as meninas, 12 não eram loiras.

– No total, havia 33 crianças.

	Loiras	Não loiras	Total
Meninos			16
Meninas		12	
Total	8		33

Agora, completando os dados:

	Loiras	Não loiras	Total
Meninos			16
Meninas		12	$33 - 16 = 17$
Total	8	$33 - 8 = 25$	33

De acordo com a tabela, havia 17 meninas.

Ainda, para complementarmos, poderíamos calcular o restante da tabela.

	Loiras	Não loiras	Total
Meninos	$16 - 13 = 3$	13	16
Meninas	$17 - 12 = 5$	12	17
Total	8	25	33

Resposta

17 meninas

▶ **03.**

Uma pesquisa realizada com os alunos do Ensino Médio de um colégio indicou que 221 alunos gostam da área de saúde, 244 da área de exatas, 176 da área de humanas, 36 da área de humanas e de exatas, 33 da área de humanas e de saúde, 14 da área de saúde e de exatas e 6 gostam das três áreas. O número de alunos que gostam apenas de uma das três áreas é:

a. 487

b. 493

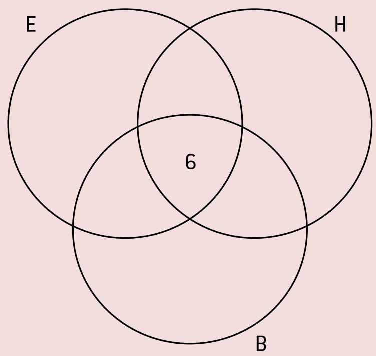
c. 564

d. 641

e. 730

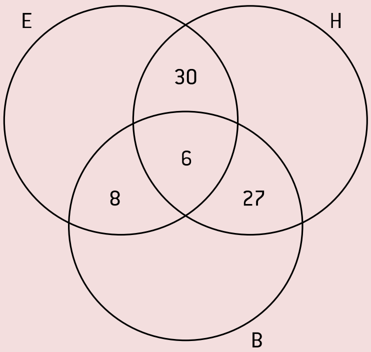
Resolução

Vamos iniciar pela intersecção dos conjuntos.

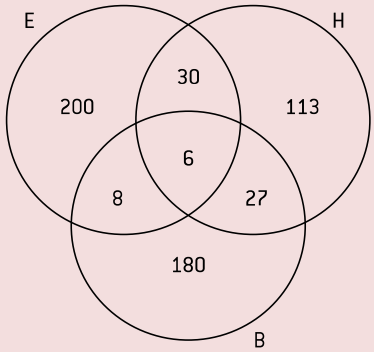


APRENDER SEMPRE **10**

Em seguida, marcar a intersecções entre E e H, entre E e B e entre H e B. Tomar o cuidado de descontar os 6 elementos já contabilizados na intersecção dos três conjuntos. Assim:



Por fim, descontando todos os valores já contabilizados, marcaremos as quantidades que correspondem aos alunos que gostam apenas de exatas, apenas de humanas e apenas da área de saúde.



Portanto, o número de alunos que gostam apenas de uma das três áreas é dado pela soma:

$200 + 113 + 180 = 493$

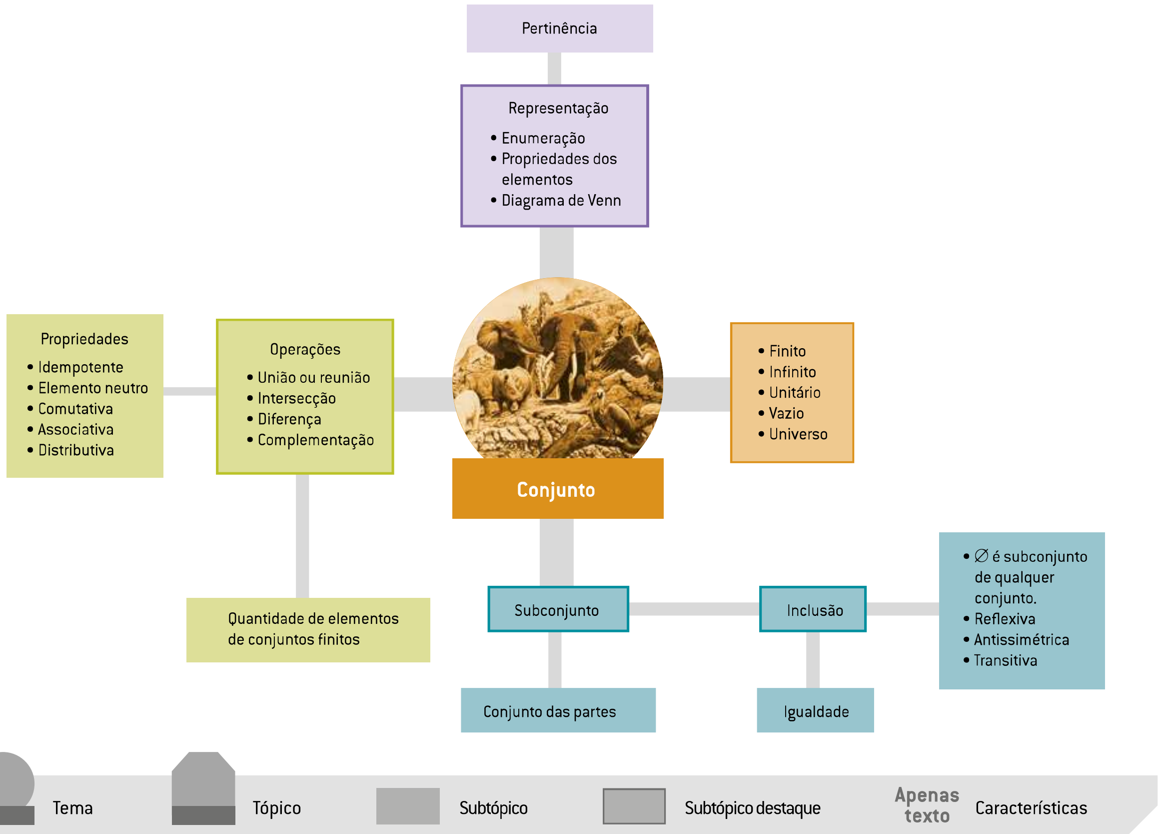
Observação – Note que os números nos diagramas não representam elementos, e sim uma quantidade de elementos.

Resposta

B

10. Organizador gráfico

A. Noções sobre conjuntos



Módulo 1

Conjuntos – Introdução

Exercícios de **Aplicação**

01.

Escreva, enumerando seus elementos, os conjuntos a seguir.

a. A = { x | x é vogal da palavra "estudante"}
b. B = {x | x é um número par, maior que 15 e menor que 25}
c. C = { x | x é um estado da região Sul do Brasil}
d. D = { x | x é raiz da equação 2x + 1 = 17}
e. E = { x | x é um número natural maior que 10 e menor que 100}

Resolução

A = {e, u, a}; B = {16, 18, 20, 22, 24}; C= {Paraná, Santa Catarina, Rio Grande do Sul}

D= {8}; E = {11, 12, 13, 14, ..., 99}

02.

Dados os conjuntos A = {x | x é letra do nosso alfabeto anterior a "f"} e

B = {x | x é número ímpar compreendido entre 2 e 12}, classifique em verdadeira (V) ou falsa (F) cada afirmação a seguir.

I. b ∈ A
II. 1 ∈ B
III. d ∉ A
IV. {3} ∈ B
V. A = B
VI. n(A) = n(B)

Resolução

A = {x | x é letra do nosso alfabeto anterior a "f"} = = {a, b, c, d, e}

B = {x | x é número ímpar compreendido entre 2 e 12} = = {3, 5, 7, 9, 11}

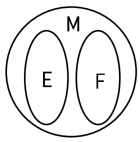
Assim:

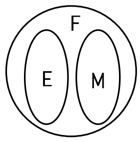
I. Verdadeira, pois b é elemento de A.
II. Falsa, pois 1 não é elemento de B.
III. Falsa, pois d é elemento de A.
IV. Falsa, pois {3} não é elemento de B. (Comentar: 3 ≠ {3})
V. Falsa, pois A e B não possuem os mesmos elementos.
VI. Verdadeira, pois A e B possuem a mesma quantidade de elementos.

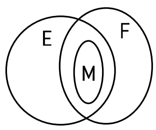
03. UFG-GO

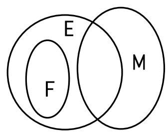
A afirmação "Todo jovem que gosta de matemática adora esportes e festas" pode ser representada segundo o diagrama:

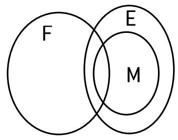
M = {jovens que gostam de matemática}
E = {jovens que adoram esportes}
F = {jovens que adoram festas}

a.


b.


c.


d.


e.


Resolução

Pela leitura e interpretação gráfica dos diagramas, a resposta que simboliza todas as condições dadas é a alternativa c.

Resposta

C

Habilidade

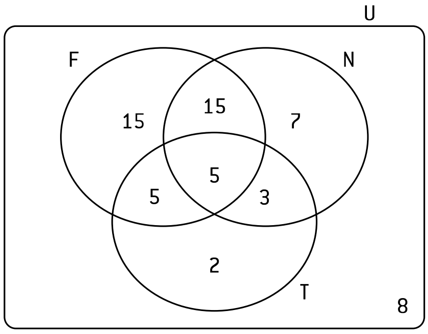
– Utilizar os conceitos básicos da teoria dos conjuntos em diferentes contextos.

EMI-15-10

Exercícios **Extras**

04.

O diagrama a seguir mostra a distribuição dos alunos de uma turma de uma escola de Ensino Médio nas modalidades de treinamento praticadas no Centro Esportivo:



F: futebol; N: natação; T: tênis

Note que o diagrama mostra, por exemplo, que somente cinco alunos praticam as três modalidades e que oito não praticam nenhuma das modalidades oferecidas.

Com a proposta de aumentar a prática dessas modalidades, será enviado um *e-mail* aos alunos que praticam apenas uma das três modalidades oferecidas, convidando-os a participarem das outras. Assim, o número de alunos dessa turma que receberá o *e-mail* é igual a:

a. 9
b. 15
c. 23
d. 24
e. 28

05.

Classifique os conjuntos a seguir em unitário ou vazio.

I. $A = \{ x \mid x$ é capital do Brasil.$\}$
II. $B = \{ x \mid x$ é número par e x é número ímpar.$\}$
III. $C = \{ x \mid x$ é diagonal de um triângulo.$\}$
IV. $D = \{ x \mid x$ é solução da equação $3x - 5 = 1$.$\}$

Seu espaço

Orientações ao Professor

- **Sobre o módulo**

Neste módulo, realizamos uma introdução ao estudo da teoria dos conjuntos.

Enfatizar a noção intuitiva de conjunto e elemento, utilizando os textos sobre Tabela Periódica e taxonomia animal apresentados no livro de teoria.

As pequenas notas históricas visam motivar os alunos para o estudo do assunto, permitindo-lhes explorar a construção de uma teoria na matemática (noções primitivas, definições, postulados, teoremas), relacionando-a com o trabalho da geometria euclidiana.

Reforçar o conceito de que a matemática é uma “linguagem” dotada de símbolos e códigos próprios, que nos auxilia a perceber a realidade e a expressar os conhecimentos adquiridos.

Os exercícios de 01 a 05 têm como objetivos compreender e assimilar o conteúdo previsto para este módulo. O exercício 7 antecipa a identificação de padrões.

Bom trabalho!

- **Na *web***

Sites sugeridos

Sociedade Brasileira de Matemática

<http://www.sbm.org.br>.

A SBM é uma entidade civil, de caráter cultural e sem fins lucrativos, voltada, principalmente, para estimular o desenvolvimento da pesquisa e do ensino da matemática no Brasil.

Revista do Professor de Matemática

<http://www.rpm.org.br>.

Publicação destinada àqueles que ensinam Matemática, sobretudo nas séries finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

<www.sbem.com.br>. – A SBEM é uma sociedade civil, de caráter científico e cultural, sem fins lucrativos e tem como objetivo a difusão ampla de informações e de conhecimentos nas inúmeras vertentes da Educação Matemática.

- **Estante**

– BOYER, Carl B. *História da matemática*. São Paulo: Edgar Blücher

Apresentação histórica da Matemática, desde as origens primitivas até os aspectos do século XX, destacando-se a contribuição de filósofos e matemáticos relevantes.

– NOVAES, Gilmar Pires. *Reflexões sobre o ensino de conjuntos*. Diagramas de Venn.

RPM, Rio de Janeiro, ano 32, n. 84. p. 44-47, 2º quadrimestre 2014.

Exercícios **Propostos**

Da teoria, leia os tópicos de 1 a 6
Exercícios de tarefa reforço aprofundamento

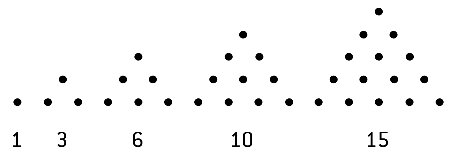
06.

Escreva, enumerando seus elementos, os conjuntos a seguir.

a. $A = \{ x \mid x$ é consoante da palavra “matemática”$\}$
b. $B = \{ x \mid x$ é um número ímpar, maior que 14 e menor que 26$\}$
c. $C = \{ x \mid x$ é um mês de 30 dias$\}$
d. $D = \{ x \mid x$ é raiz da equação $3x - 1 = 14\}$
e. $E = \{ x \mid x$ é um número natural maior que 10$\}$

07.

Na época de Pitágoras, a contagem era feita com pedrinhas ou marcas de pontos na areia. Por outro lado, os pitagóricos eram observadores atentos de formas geométricas. Daí porque, talvez, eles tenham tido sua atenção chamada para os números figurados. Estes, como diz o próprio nome, resultam de arranjos com os pontos ou pedrinhas de maneira a formar figuras geométricas. Assim, os números 1, 3, 6, 10,... são chamados triangulares porque correspondem à distribuição de pedrinhas num plano na forma de triângulo.



Escreva o conjunto dos sete primeiros números triângulos.

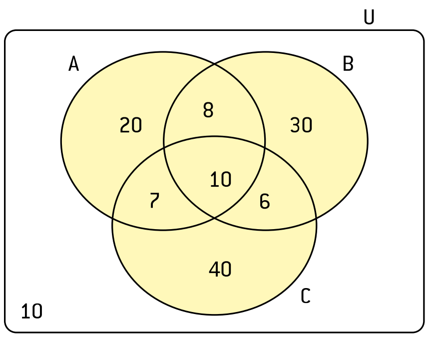
08.

Classifique em verdadeira (V) ou falsa (F) cada afirmação a seguir.

I. O conjunto A = { x | x é um mês cujo nome começa com "a".} é vazio.
II. O conjunto B = { x | x é um número e $0 \cdot x = 2$.} é unitário.
III. {1, 3, 5, 7} = {1, 5, 3, 7}
IV. {1, 2, 2, 3, 3, 3} ≠ {1, 2, 3}
V. Sendo C = {2, 4, 6}, então {4} ∈ C.

09.

O resultado de uma pesquisa de mercado sobre o consumo de três marcas, A, B e C, de um determinado produto está indicado no diagrama a seguir.



Note que o diagrama mostra, por exemplo, que somente oito entrevistados responderam que consomem apenas as marcas A e B e que 10 entrevistados não consomem nenhuma das três marcas apresentadas.

O número de entrevistados apontados pela pesquisa que consomem pelo menos duas das marcas apresentadas é igual a:

a. 10
b. 21
c. 31
d. 90
e. 121

10.

Se {–1 ; 2x + y ; 2 ; 3 ; 1} = {2 ; 4 ; x – y ; 1 ; 3}, então:

a. $x > y$
b. $x < y$
c. $x = y$
d. $2x < y$
e. $x > 2y$

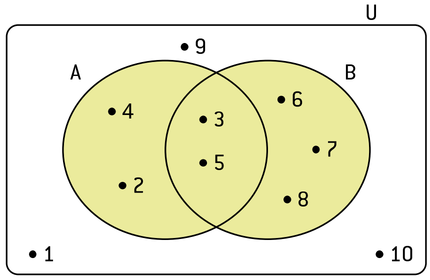
11.

Descreva, por meio de uma propriedade característica dos elementos, cada um dos conjuntos seguintes:

A = {0, 2, 4, 6, 8, ... }
B = {0, 1, 2, ..., 9}
C = {Amazonas, Amapá, Acre, Alagoas}

12.

Considere o diagrama a seguir.



Com base nele, é correto afirmar que:

a. 3 ∉ B
b. 5 ∈ A e 5 ∉ B
c. 4 ∉ A e 6 ∈ B
d. A = {2, 3, 4, 5}
e. U = {1, 9, 10}

13.

Sabendo que {1, 3, a} = {5, 3, 1} e que {8, 4} = {8, 4, b}, um possível valor para (a + b) é:

a. 8
b. 9
c. 10
d. 11
e. 12

14.

Escreva, enumerando seus elementos, os conjuntos a seguir.

a. A = { x | x é raiz da equação $(x - 1)(x - 2) = 0$.}
b. B = { x | x é raiz da equação $x^3 - 4x = 0$.}
c. C = { x | x é raiz da equação $2x^2 - 3x - 2 = 0$.}

15.

Considere as afirmações a seguir:

I. O conjunto A = {5, 5, 5, 5, 5} possui 5 elementos.
II. O conjunto B = { x | x é número e $\frac{1}{x} = 0$ } é vazio.
III. O conjunto C = { x | x é raiz da equação $x^2 + 9 = 6x$.} é unitário.

Está correto o que se afirma somente em:

a. I.
b. II.
c. III.
d. I e II.
e. II e III.

16. Fuvest-SP

Sendo

A = {2,3,5,6,9,13} e B = {a^b|a ∈ A, b ∈ A e a ≠ b},

o número de elementos de B, que são números pares, é:

a. 5
b. 0
c. 10
d. 12
e. 13

Módulo 2

Subconjuntos

Exercícios de **Aplicação**

01.

Dados os conjuntos:

$A = \{x \mid x$ é número ímpar compreendido entre 1 e 9.$\}$;
$B = \{x \mid x$ é número primo compreendido entre 1 e 10.$\}$;
$C = \{x \mid x$ é número primo, par e maior que 3.$\}$ e
$D = \{x \mid x$ é divisor de 7 compreendido entre 1 e 10.$\}$,

classifique em verdadeira (V) ou falsa (F) cada afirmação a seguir.

I. $A \subset B$	**III.** $D \not\subset A$	**V.** $B \not\subset A$
II. $B \subset D$	**IV.** $C \subset A$	**VI.** $2 \subset B$

Resolução

$A = \{x \mid x$ é número ímpar compreendido entre 1 e 9$\} = \{3, 5, 7\}$

$B = \{x \mid x$ é número primo compreendido entre 1 e 10$\} = \{2, 3, 5, 7\}$

$C = \{x \mid x$ é número primo, par e maior que 3$\} = \varnothing$

$D = \{x \mid x$ é divisor de 7 compreendido entre 1 e 10$\} = \{7\}$

Assim:

I. Verdadeira, pois todo elemento de A é também de B.
II. Verdadeira, pois o único elemento de D também pertence a B.
III. Falsa, pois o único elemento de D também pertence a A.
IV. Verdadeira, pois $C = \varnothing$ e $\varnothing \subset A$, qualquer que seja o conjunto A.
V. Verdadeira, pois $2 \in B$ e $2 \notin A$.
VI. Falsa, pois 2 é elemento de B, isto é, $2 \in B$.

02.

Dados os conjuntos $A = \{2, 6, 10\}$, $B = \{2, 4, 6, 10, 12\}$ e o conjunto universo

$U = \{x \mid x$ é número par, positivo e menor do que 18$\}$,

considere as afirmações:

I. $C_B^A = \{4, 12\}$
II. $C_A^B = \varnothing$
III. $\overline{B} = \{8, 14, 16\}$
IV. $n[P(B)] - n[P(A)] = 24$, em que $n[P(X)]$ é o número de elementos do conjunto das partes de um conjunto X.

O número de afirmações corretas é:

a. 0 **b.** 1 **c.** 2 **d.** 3 **e.** 4

Resolução

$A = \{2, 6, 10\}$, $B = \{2, 4, 6, 10, 12\}$

$U = \{x \mid x$ é número par, positivo e menor que 18.$\} =$
$= \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$

I. Verdadeira, pois, como $A \subset B$, temos $C_B^A = \{4, 12\}$.
II. Falsa, pois, como $B \not\subset A$, não existe C_A^B.
III. Verdadeira, pois, como $A \subset U$, temos $\overline{B} = \{8, 14, 16\}$.
IV. Verdadeira, pois $n[P(B)] - n[P(A)] = 2^{n(B)} - 2^{n(A)} = 2^5 - 2^3 = 32 - 8 = 24$.

Portanto, o número de afirmações corretas é 3.

Resposta

D

03. Cesgranrio-RJ

O número de conjuntos X que satisfazem $\{1, 2\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4\}$ é:

a. 3
b. 4
c. 5
d. 6
e. 7

Resolução

De $\{1, 2\} \subset X$, temos que $1 \in X$ e $2 \in X$.

Como $X \subset \{1, 2, 3, 4\}$, os possíveis conjuntos X procurados são:

$X = \{1, 2\}$ ou $X = \{1, 2, 3\}$ ou $X = \{1, 2, 4\}$ ou $X = \{1, 2, 3, 4\}$

Portanto, o número de conjuntos possíveis X é 4.

Resposta

B

Habilidade

Aplicar o conceito de subconjunto na resolução de problemas, em diferentes contextos.

Exercícios **Extras**

04. UFPE

Seja $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ o conjunto de sintomas de uma determinada moléstia. Em geral, um portador desta moléstia apresenta apenas um subconjunto não vazio de S.

Assinale a única alternativa correspondente ao número de subconjuntos de S que poderão apresentar os pacientes portadores desta moléstia.

a. 7
b. 8
c. 16
d. 15
e. 14

05. UFMS

Acrescentando-se dois novos elementos a um conjunto A, verificou-se que o número de subconjuntos de A teve um aumento de 384. Quantos elementos possuía originalmente o conjunto A?

Seu espaço

Orientações ao Professor

- **Sobre o módulo**

Neste módulo, com a definição de subconjunto, trabalhamos a relação de inclusão entre conjuntos.

Utilizar diagramas no trabalho com subconjuntos para aprimorar a leitura gráfica.

Com a definição de subconjunto, apresentar os assuntos relacionados:

- conjunto complementar;
- conjunto das partes de um conjunto;
- número de elementos do conjunto das partes de um conjunto.

Explorar a interdisciplinaridade com Filosofia comentando o exercício resolvido 05. **(Aprender sempre 5)**.

Bom trabalho!

Exercícios Propostos

Da teoria, leia o tópico 7

Exercícios de tarefa reforço aprofundamento

06.

Considere os conjuntos: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 3\}$ e $C = \{3, 10\}$ e associe V (verdadeiro) ou F (falso) a cada afirmação:

a. $4 \in A$
b. $3 \subset B$
c. $\{3\} \subset B$
d. $B \in A$
e. $A \supset B$
f. $C \subset A$

07.

Dados os conjuntos $A = \{3, 5\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$, $C = \{5\}$ e o conjunto universo $U = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, determine:

a. C_B^A
b. $\overline{B}$
c. o conjunto das partes do conjunto C.
d. o número de elementos do conjunto das partes do conjunto B.

08.

Dados os conjuntos:

$A = \{x \mid x$ é divisor de 6 maior que 0 e menor que 10.$\}$;

$B = \{x \mid x$ é solução da equação $2x - 4 = 8\}$ e o conjunto universo

$U = \{x \mid x$ é número inteiro maior que -3 e menor que $8\}$, determine:

a. C_B^A
b. C_A^A
c. $\overline{A}$

09. Sistema COC

O número de subconjuntos unitários em um conjunto que apresenta, no seu conjunto de partes, 128 elementos é igual a:

a. 5
b. 6
c. 7
d. 8
e. 9

10. UFV-MG

Dados o conjunto $A = \{3, \{3\}\}$ e as seguintes informações:

I. $3 \in A$
II. $\{3\} \in A$
III. $\{3\} \subset A$

é correto afirmar que:

a. somente I é verdadeira.
b. somente I e II são verdadeiras.
c. todas as afirmações são verdadeiras.
d. somente III é verdadeira.
e. somente II é verdadeira.

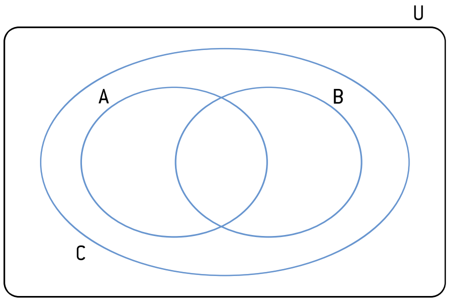
11. FCC-SP

Se $A = \{\varnothing, 3, \{3\}, \{2, 3\}\}$, então:

a. $\{2, 3\} \subset A$
b. $2 \in A$
c. $\varnothing \notin A$
d. $3 \subset A$
e. $\{3\} \in A$

12.

Considere o diagrama a seguir.



Com base nele, é correto afirmar que:

a. $A \not\subset C$
b. $B \not\subset C$
c. $A \subset B$
d. $A \supset B$
e. $C \not\subset A$

13. UEL-PR

Sendo $A = \{\varnothing, a, \{b\}\}$ com $\{b\} \neq a \neq b \neq \varnothing$, então:

a. $\{\varnothing, \{b\}\} \subset A$
b. $\{\varnothing, b\} \subset A$
c. $\{\varnothing, \{a\}\} \subset A$
d. $\{a, b\} \subset A$
e. $\{\{a\}, \{b\}\} \subset A$

14.

Dado o conjunto $A = \{1, 2, \{1\}, \{3\}, \varnothing\}$, classifique em verdadeira (V) ou falsa (F) cada afirmação a seguir.

I. $\{3\} \in A$
II. $\{3\} \not\subset A$
III. $\{2\} \in A$
IV. $\{1\} \notin A$
V. $\{1\} \not\subset A$
VI. $\{\{1\}\} \subset A$
VII. $\{1, \{1\}\} \in A$
VIII. $\varnothing \in A$
IX. $\varnothing \not\subset A$
X. $\{\varnothing\} \subset A$

15. FCMSC-SP

Um conjunto A possui n elementos e um conjunto B possui um elemento a mais do que A. Sendo x e y os números de subconjuntos de A e B, respectivamente, tem-se que:

a. y é o dobro de x.
b. y é o triplo de x.
c. $y = \frac{x}{2} + 1$.
d. $y = x + 1$.
e. y pode ser igual a x.

16. UFC-CE

Se um conjunto A possui n elementos, então o conjunto P(A), das partes de A, possui 2^n elementos. Qual é o número de elementos do conjunto das partes de P(A)?

a. 2^n
b. 4^n
c. 2^{2^n}
d. 8^n
e. 16^n