Matemática

211

212

MAT

- Resolver problemas elementares de contagem utilizando o princípio multiplicativo.
- Aplicar os raciocínios combinatórios aditivo e/ou multiplicativo na resolução de situações-problema.
- Resolver problemas que envolvam cálculo combinatório sem repetição.
- Simplificar expressões com fatoriais.
- Resolver equações com fatoriais.

ISSAM KHRIJI / PABLOGRAPHIX / MARTINLUBPL / MAXKABAKOV / ISTOCK

Análise combinatória – Parte I

17

O uso de computadores nas mais diversas atividades cotidianas é uma característica da sociedade atual. Seu funcionamento depende de programações que envolvem a construção de algoritmos fundamentados em raciocínio combinatório.

Quando acessamos determinado *site*, usamos uma senha, escolhida dentre as muitas possibilidades de que dispomos. A quantidade de senhas possíveis é calculada por meio de conhecimentos de análise combinatória. Técnicas para ampliar a quantidade de senhas possíveis ou que garantam o seu sigilo são fundamentais para as instituições comerciais ou financeiras.

1. Princípio fundamental da contagem: princípio multiplicativo

A. Introdução

Uma das atividades mais antigas da humanidade é o ato de contar. Nos dias de hoje, desde tenra idade, os seres humanos estabelecem processos de contagem, principalmente no que se refere à idade. Com o amadurecimento, necessitamos de outras formas de realizá-los, principalmente quando envolve valores monetários para compra de mercadorias. Nem todo processo de contagem é simples ou imediato. Suponha o grau de dificuldade para os clientes quando um banco decide estabelecer regras para se elaborar uma senha. Quantas senhas, de acordo com as regras impostas, são possíveis elaborar? Ou, em outro tipo de estudo, quantas placas de carros podem existir no modelo atual? Ou de quantas maneiras pode-se organizar uma comissão de cinco trabalhadores em uma empresa? Essas perguntas, bem como tantas outras, são respondidas com o auxílio de um ramo da matemática denominado **análise combinatória,** que tem como pedra fundamental o **princípio fundamental da contagem**. Para começar a entender esse assunto, acompanhe a situação a seguir.

Suponha que o diretor de uma peça teatral esteja selecionando os atores para encená-la. Sabe-se que nela há dois personagens adultos e principais, um do sexo masculino e um do sexo feminino. Para ocupar a vaga do personagem masculino, há três atores pré-selecionados e, a do sexo feminino, cinco atrizes pré-selecionadas. De quantas maneiras diferentes o diretor pode escolher sua dupla de atores principais?

Para responder a essa pergunta, primeiramente será indicado um símbolo para cada um dos atores, por exemplo, R, S e T para os atores candidatos à vaga do personagem do sexo masculino, e A, E, I, O e U para as atrizes candidatas à vaga do personagem feminino.

Com o ator R, é possível formar cinco duplas. Observe:

(R; A), (R; E), (R; I), (R; O), (R; U)

Agora, utilizando o ator S, é possível formar outras cinco duplas. Repare:

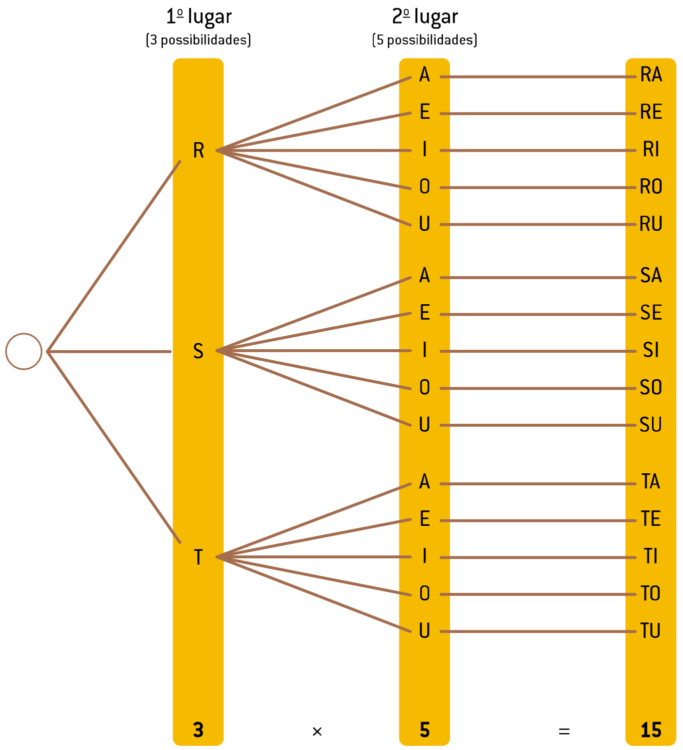
(S; A), (S; E), (S; I), (S; O), (S; U)

Por fim, em referência ao ator T, é possível formar mais cinco duplas. Acompanhe:

(T; A), (T; E), (T; I), (T; O), (T; U)

Ao todo, é possível formarem-se quinze duplas distintas.

Há outro método chamado **diagrama de árvores** ou árvore das **possibilidades** para se encontrarem as 15 possibilidades. Note.



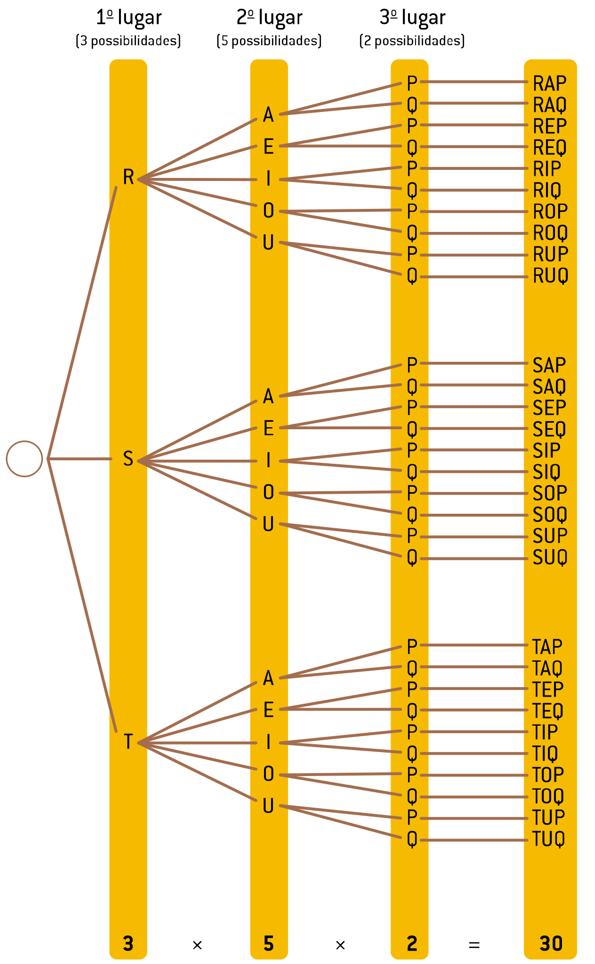
Para efetuar a contagem de todas as possibilidades, não é necessário exibir todos os cálculos passíveis de realização. Pode-se resumir as possibilidades da seguinte forma:

"Há cinco duplas possíveis com cada ator e há três atores. Assim, a quantidade de maneiras pode ser obtida multiplicando-se três e cinco".

Ao efetuar a multiplicação de 3 e 5, obtêm-se 15, que, como foi visto, é a quantidade de duplas possíveis e distintas.

Suponha agora que, além dos personagens adultos, haja ainda um personagem infantil, também principal, e dois candidatos distintos para ocupar essa vaga. De quantas formas diferentes é possível formar o trio de atores principais?

Chamando os candidatos ao personagem infantil de P e Q e avaliando o diagrama de árvores, seguem as possibilidades:



Há quinze possibilidades para a dupla adulta, conforme visto anteriormente.

Para cada ator infantil, existem quinze casais para formar o trio.

Há assim trinta maneiras de se escolher o trio de atores principais.

Poder-se-ia encontrar o resultado multiplicando-se os fatores 3, 5 e 2.

Essa forma de contar as possibilidades para ocorrer um encadeamento de eventos, através da multiplicação do número de possibilidades do primeiro evento, pelo número de possibilidades do segundo evento, pelo número de possibilidades do terceiro evento, e assim por diante, é denominado **princípio fundamental da contagem – princípio multiplicativo.**

B. Enunciado do princípio fundamental da contagem: princípio multiplicativo

Se um acontecimento é resultado da ocorrência de dois eventos sucessivos e independentes, **A** e **B**, e o número de maneiras para ocorrer o evento **A** é igual a **n** e o número de maneiras para ocorrer o evento **B** é igual a **p**, então o número de maneiras de ocorrer o acontecimento **A** e **B** é igual a $\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}$.

Exemplo

Quantos números naturais de dois algarismos podem ser formados utilizando os algarismos 1, 2, 3, 4, e 5?

Resolução

Um número natural de dois algarismos possui a casa das unidades e a casa das dezenas. Pode-se dizer que o evento A é a escolha do algarismo que completará a casa das dezenas e o evento B, a das unidades. Há cinco possibilidades para se escolher o algarismo das dezenas e cinco possibilidades para o algarismo das unidades. O número natural será formado ao se preencher a casa das dezenas, evento A, e a casa das unidades, evento B. Dessa forma, pela princípio multiplicativo, há cinco vezes cinco maneiras de ocorrer o número natural, isto é, há vinte e cinco números naturais possíveis.

Para facilitar e acelerar a resolução de exercícios desse tipo, recorre-se a recursos visuais e analíticos, como o que segue:

Casa das dezenas	e	casa das unidades	
5	×	5	= 25

Nesse tipo de apresentação, será usada a seguinte prática: dentro de cada retângulo serão colocadas as possibilidades (quando estas ficarem evidentes, não será necessário preenchê-las, como foi feito) e, abaixo do retângulo, a quantidade de possibilidades.

O princípio multiplicativo não se aplica a apenas dois eventos, mas também a qualquer quantidade natural, maior que 1, de eventos. Acompanhe a generalização do princípio fundamental da contagem – princípio multiplicativo.

Se um acontecimento é resultado da ocorrência de **k** eventos sucessivos e independentes, $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$, ..., $\mathbf{A_k}$, e as maneiras para ocorrer cada evento são, respectivamente, $\mathbf{n_1}$, $\mathbf{n_2}$, $\mathbf{n_3}$, ..., $\mathbf{n_k}$, então o número de maneiras de ocorrer o acontecimento $\mathbf{A_1}$ e $\mathbf{A_2}$ e $\mathbf{A_3}$ e ... e $\mathbf{A_k}$ é igual a $\mathbf{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot ... \cdot n_k}$.

Exemplo

Quantos números naturais de três algarismos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, e 5?

Resolução

Há cinco possibilidades para a casa das centenas, cinco possibilidades para a casa das dezenas e cinco possibilidades para a casa das unidades.

Centenas	e	dezenas	e	unidades	
5	×	5	×	5	= 125

Há 125 possíveis números naturais de três algarismos.

APRENDER SEMPRE 1

01.

Quantos são os divisores naturais do número inteiro $N = 2^{10} \cdot 5^5$?

Resolução

Um número natural d será divisor de um número inteiro N se o número d for igual a 1 ou se, na decomposição em fatores primos de d, aparecerem somente os fatores primos de N com expoente, no máximo, igual ao respectivo expoente do mesmo fator primo que aparece em N. Dessa forma, o divisor d terá a forma $d = 2^r \cdot 5^s$.

Os candidatos à expoente de 2, isto é, os valores de r são: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10.

Os candidatos à expoente de 5, isto é, os valores de s são: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Para o número d ser divisor de N, é necessário escolher o valor de r e o valor de s. Há 11 maneiras de se escolher r e seis maneiras de se escolher s. Assim, pelo princípio multiplicativo, há 11 vezes 6 maneiras de se encontrar d, isto é, há 66 números naturais divisores de N.

02.

Um artista tem 4 cartolas, 3 casacos e 5 bengalas, todos diferentes. Em cada apresentação, ele deve usar uma cartola, um casaco e uma bengala. Quantas apresentações ele pode fazer sem repetir um mesmo conjunto de três peças?

Resolução

Cartolas	Casacos	Bengalas	
4 ·	3 ·	5	= 60 apresentações

O artista precisa escolher 3 peças. Assim:

1ª peça: cartola (4 possibilidades)

2ª peça: casaco (3 possibilidades)

3ª peça: bengala (5 possibilidades)

Aplicando o princípio fundamental da contagem, princípio multiplicativo, temos que o total de modos que esse artista tem para se vestir é dado por $4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ possibilidades.

C. Princípio da preferência

Considere o problema.

"Quantos números naturais de dois algarismos existem no nosso sistema de numeração? "

Para resolver esse problema, primeiramente, analisa-se quais são os algarismos do nosso sistema de numeração: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

Um número natural de dois algarismos precisa ter a casa das dezenas e a casa das unidades, sendo que a casa das dezenas não pode ser ocupada pelo algarismo zero. Dessa forma, dizemos que a casa das dezenas tem uma restrição.

Se a contagem for iniciada pela casa das unidades, haverá dez possibilidades para essa casa. Ao preencher a casa das dezenas, haverá nove possibilidades, pois o zero não pode ser usado. Usando o princípio multiplicativo, têm-se 10 vezes 9 números naturais de dois algarismos, isto é, 90 números.

Agora, se a contagem for iniciada pela casa das dezenas, haverá nove possibilidades para essa casa, pois o zero não pode ser usado. Ao preencher a casa das unidades, haverá dez possibilidades para essa casa. Utilizando o princípio multiplicativo, há 9 vezes 10 números naturais de dois algarismos, isto é, 90 números. Chegou-se ao mesmo resultado.

Esses valores estão corretos, pois a quantidade de números naturais de 2 algarismos é dada por:

Há 10 números naturais iniciados por 1, do 10 ao 19.

Há 10 números naturais iniciados por 2, do 20 ao 29.

Há 10 números naturais iniciados por 3, do 30 ao 39.

⋮

Há 10 números naturais iniciados por 8, do 80 ao 89.

Há 10 números naturais iniciados por 9, do 90 ao 99.

Então, chega-se, de fato, à conclusão de que há 90 números naturais de dois algarismos no nosso sistema de numeração.

O problema anterior apresentou uma restrição, mas, como se estava atento a ela, não houve maiores problemas para resolver a contagem.

Há, contudo, situações em que a restrição é "forte" e a contagem não pode seguir qualquer ordem.

Observe agora o problema:

"Quantos números naturais de dois algarismos distintos existem no nosso sistema de numeração? "

O que muda nesse problema é o fato de que, no mesmo número natural, os algarismos não podem se repetir.

Dessa forma, se a contagem for iniciada sem nenhum cuidado preliminar, por exemplo, iniciando-a pela casa das unidades, uma vez que esta tenha sido selecionada primeiro, haverá 10 possibilidades de escolha de algarismos para ela. No entanto, ao preencher a casa das dezenas, haverá um impasse, pois, se o algarismo das unidades for o zero, a casa das dezenas apresentará nove possibilidades de escolha, porque o zero já está sendo usado na casa das unidades, mas, se o zero não estiver sendo usado na casa das unidades, haverá apenas oito possibilidades para a casa das dezenas, uma vez que o algarismo utilizado nas unidades e o zero não poderão ser usados na casa das dezenas. A contagem, dessa forma, não pode ser efetuada porque há uma restrição "forte", que é a casa das dezenas, assim nem o zero nem o algarismo usado na casa das unidades poderão ser novamente usados.

A contagem terá de se iniciar pela casa das dezenas, pois esta tem a restrição "forte". Para esta casa, há nove possibilidades de escolha e o zero deve ficar de fora. Agora, para a casa das unidades, não pode ser escolhido o mesmo algarismo que ocupa a casa das dezenas, mas o zero, que estava de fora, pode ser usado. Assim, têm-se nove possibilidades de escolha para a casa das unidades. De acordo com o princípio multiplicativo, há nove vezes nove números naturais possíveis, isto é, há 81 números naturais de dois algarismos distintos no nosso sistema de numeração.

Esse resultado pode ser comprovado no primeiro problema aqui apresentado. Nele foi visto que havia 90 números naturais de dois algarismos no nosso sistema de numeração. No segundo problema apresentado anteriormente, devem-se excluir os que têm algarismos repetidos, ou seja, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 e 99. Há, dessa forma, 9 números naturais de dois algarismos, sendo estes repetidos. Do total de 90 tiram-se 9 e chega-se ao resultado 81, confirmando a contagem.

Para evitar impasses na contagem, como ocorreu no segundo problema, segue uma regra denominada **princípio da preferência** (**PP**), que diz:

O estudo da contagem do número de possibilidades de determinado acontecimento deve começar sempre pelas situações em que há restrição, dando-se preferência àquelas em que a restrição é mais “forte”.

APRENDER SEMPRE 2

01.

Usando os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5, quantos números de 3 dígitos podemos representar, sem algarismos repetidos?

Resolução

	Centenas e	dezenas e	unidades	
Restrição mais "forte"	algarismo diferente de zero	qualquer algarismo fornecido no enunciado com exceção daqueles usados na casa das centenas e na casa das unidades	qualquer algarismo fornecido no enunciado com exceção daqueles usados na casa das centenas e na casa das dezenas	
	4 ·	3 ·	5	= 100

Há 100 números.

D. Princípio fundamental da contagem: princípio aditivo

Considere o problema:

“Quantos números naturais de 2 algarismos distintos têm a soma dos seus algarismos igual a 5 ou igual a 6?”

Uma das maneiras de responder a essa pergunta é separar o problema em dois eventos:

Evento A: números naturais de dois algarismos que têm a soma destes igual a 5.

Evento B: números naturais de dois algarismos que têm a soma destes igual a 6.

Elementos do evento A: 14, 23, 32 e 41.

Elementos do evento B: 15, 24, 42, 51. Observe que 33 apresenta a soma dos algarismos igual a 6, mas não tem algarismos distintos.

O total de números pedidos é 8. Este resultado pode ser obtido pela adição das quatro possibilidades do evento A com as quatro possibilidades do evento B. A adição é utilizada nesse caso, pois o problema propõe que ocorra o evento A **ou** o evento B. O uso do conectivo **ou** provocou a utilização da adição.

Essa forma de resolver o problema utilizou um princípio de contagem denominado **princípio aditivo**.

D.1. Enunciado do princípio aditivo

Se o número de maneiras para ocorrer o evento **A** é igual a **n** e o número de maneiras para ocorrer o evento **B** é igual a **p**, sendo que **A** e **B** não têm elementos em comum, então o número de maneiras de ocorrer o evento **ou A ou B** é igual a **n + p**.

Exemplo

A superfície de um sólido é constituída por apenas vinte faces hexagonais brancas e doze faces pentagonais pretas. Quantas são as faces da superfície desse sólido?

Resolução

Utilizando o princípio aditivo para resolver esse problema, pode-se dividi-lo em: faces pretas ou faces brancas.

Faces pretas	ou	faces brancas	
20	+	12	= 32

Há 32 faces.

Observe que o problema poderia ser dividido em: faces hexagonais ou faces pentagonais.

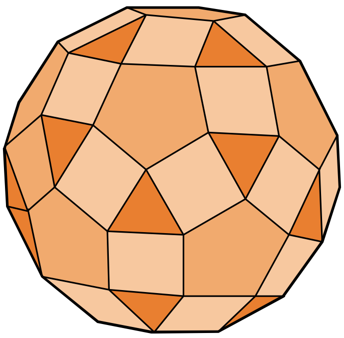
Faces hexagonais	ou	faces pentagonais	
20	+	12	= 32

Há, conforme visto anteriormente, 32 faces.

O princípio aditivo não se aplica a apenas dois eventos, mas também a qualquer quantidade natural, maior que 1, de eventos. Acompanhe a generalização do princípio aditivo.

Se as maneiras para ocorrer os eventos $\mathbf{A_1, A_2, A_3, ..., A_k}$ são, respectivamente, $\mathbf{n_1, n_2, n_3, ..., n_k}$, e os eventos, dois a dois, não têm elementos em comum, então o número de maneiras de ocorrer o evento **ou** $\mathbf{A_1}$ **ou** $\mathbf{A_2}$ **ou** $\mathbf{A_3}$ **ou ... ou** $\mathbf{A_k}$ é igual a $\mathbf{n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_k}$.

Exemplo



A superfície de um sólido é constituída de apenas vinte faces triangulares, trinta faces quadrangulares e doze faces pentagonais. Quantas são as faces da superfície desse sólido?

Resolução

Utilizando o princípio aditivo para resolver esse problema, pode-se dividi-lo em: faces triangulares ou faces quadrangulares ou faces pentagonais.

Faces triangulares	ou	faces quadrangulares	ou	faces pentagonais	
20	+	30	+	12	= 62

Há 62 faces.

No tópico 1.C, foi mencionado o princípio da preferência, em que, ocorrendo restrições, é necessário iniciar a contagem pela restrição mais “forte”. Existem, contudo, situações em que há mais de uma restrição, não sendo possível detectar qual é mais "forte". Nesse caso, é preciso dividir o problema em partes, usando geralmente o **princípio aditivo**. Acompanhe o exemplo a seguir.

Exemplo

Quantos números naturais pares de quatro algarismos distintos e maiores que 2 000 há no nosso sistema de numeração?

Resolução

Há duas restrições, além de os algarismos serem distintos, que são: a casa do milhar não pode usar os algarismos 0 e 1; a casa das unidades não pode usar algarismos ímpares.

Milhar	e	centena	e	dezena	e	unidade
não se poder usar nem o zero nem o 1		qualquer algarismo diferente dos usados na casa dos milhares, e na casa das dezenas e na casa das unidades		qualquer algarismo diferente dos usados na casa dos milhares, e na casa das centenas e na casa das unidades		não se pode usar os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9

Há duas restrições "fortes", uma na casa das unidades e outra na casa dos milhares.

Possíveis algarismos para a casa das unidades: 0, 2, 4, 6 e 8

Possíveis algarismos para a casa dos milhares: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9

Suponha que a restrição mais "forte" corresponda à casa dos milhares, e, nesse caso, começa-se a contagem por essa casa. Se o algarismo que estiver sendo usado na casa do milhar for ímpar, haverá cinco possibilidades de escolha para a casa das unidades, porém, se o algarismo escolhido para a casa do milhar for par, a escolha da casa das unidades terá quatro possibilidades. Note que há um impasse, pois, a casa das unidades ora tem cinco possibilidades, ora tem quatro possibilidades. Não se pode considerar a casa dos milhares como sendo a casa de restrição mais "forte".

Admita agora que a restrição mais "forte" esteja na casa das unidades. Se o algarismo zero estiver ocupando esta casa, então haverá oito possibilidades de escolha para a casa dos milhares, mas, se o algarismo das unidades não for o zero, então haverá sete possibilidades de escolha para o algarismo dos milhares, caindo novamente em impasse.

Para resolvê-lo, o problema precisará ser desmembrado. Para tanto, uma possibilidade é usar o princípio aditivo da seguinte forma:

Considere a situação dos números naturais que terminam em zero **ou** terminam em número par diferente de zero.

Números naturais de quatro algarismos que terminam em zero — ou — **Números naturais de quatro algarismos que terminam em 2 ou 4 ou 6 ou 8**

Milhar	e	centena	e	dezena	e	unidade		Milhar	e	centena	e	dezena	e	unidade	
não se pode usar nem o zero nem o 1		qualquer algarismo diferente dos usados na casa dos milhares, na casa das dezenas e na casa das unidades		qualquer algarismo diferente dos usados na casa dos milhares, e na casa das centenas e na casa das unidades		0	ou	não se pode usar nem o zero nem o 1		qualquer algarismo diferente dos usados na casa dos milhares, na casa das dezenas e na casa das unidades		qualquer algarismo diferente dos usados na casa dos milhares, e na casa das centenas e na casa das unidades		2 ou 4 ou 6 ou 8	
8	×	8	×	7	×	1	+	7	×	8	×	7	×	4	=
		448					+				1 568				= 2 016

Observe que, ao optar por esse tipo de desmembramento, a casa das unidades apresentará a restrição mais "forte", sendo que foi por ela que a contagem foi iniciada em cada uma das parcelas separadas pelo conectivo **ou**.

Ressalte-se também que o mesmo resultado seria encontrado se o problema fosse desmembrado, ou seja, começar por algarismo par **ou** começar por algarismo ímpar. Faça essa verificação como uma forma de exercício.

APRENDER SEMPRE

3

01. Vunesp

Um certo tipo de código usa apenas dois símbolos, o número zero (0) e o número (1), e, considerando esses símbolos como letras, podem-se formar palavras. Por exemplo: 0, 01, 00, 001 e 110 são algumas palavras de uma, duas e três letras desse código. O número máximo de palavras, com cinco letras ou menos, que podem ser formadas com esse código é:

- **a.** 120
- **b.** 62
- **c.** 60
- **d.** 20
- **e.** 10

Resolução

Com 1 letra = $\overline{2} = 2$

ou

com 2 letras = $\overline{2} \cdot \overline{2} = 4$

ou

com 3 letras = $\overline{2} \cdot \overline{2} \cdot \overline{2} = 8$

ou

com 4 letras = $\overline{2} \cdot \overline{2} \cdot \overline{2} \cdot \overline{2} = 16$

ou

com 5 letras = $\overline{2} \cdot \overline{2} \cdot \overline{2} \cdot \overline{2} \cdot \overline{2} = 32$

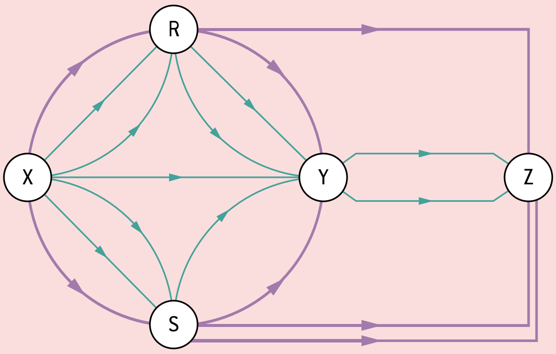
$\therefore\ 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62$

Alternativa correta: B

EMI-16-110

02. UFMG

Observe o diagrama.



O número de ligações distintas entre X e Z é:

a. 39
b. 41
c. 35
d. 45
e. 52

Resolução

$\frac{3}{X \to R}\ \frac{1}{R \to Z}$

ou

$\frac{3}{X \to R}\ \frac{3}{R \to Y}\ \frac{2}{Y \to Z}$

ou

$\frac{1}{X \to Y}\ \frac{2}{Y \to Z}$

ou

$\frac{3}{X \to S}\ \frac{2}{S \to Z}$

ou

$\frac{3}{X \to S}\ \frac{3}{S \to Y}\ \frac{2}{Y \to Z}$

Total $= 3 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 2 =$
$= 3 + 18 + 2 + 6 + 12 = 41$

Alternativa correta: B

E. Fatorial

Christian Kramp (1760-1826)

Louis François Antoine Arbogast (1759-1803)

Há indícios históricos de que dois dos responsáveis pelo uso do símbolo "!" para indicar o fatorial de um número natural foram Christian Kramp (1760-1826), do reino da França, e Louis François Antoine Arbogast (1759-1803), também do reino da França.

Considere os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8. Quantos números naturais de oito algarismos distintos são possíveis formar com esses algarismos?

Resolução

O fato de os algarismos serem distintos é a única restrição do problema, então a contagem pode se iniciar por qualquer posição.

Uma vez escolhida, por exemplo, a primeira posição para iniciar a contagem, cada casa na sequência não pode repetir o algarismo usado na anterior, diminuindo, assim, posição a posição, um algarismo como candidato.

$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

O resultado da pergunta é o produto $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, o qual tem uma particularidade: cada fator, na sequência, a partir do segundo, é uma unidade a menos que o fator anterior e o último fator é igual a 1. Não apenas nesse problema, como também em outros, aparecem produtos com essas características, e, pelo fato de existirem resultados com valores altos e possibilidades de simplificação, pensou-se em uma representação especial para esse produto conhecida pelo nome de **fatorial**, em que é escrito o maior dos fatores acompanhado do símbolo "!". No caso, o produto $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ é representado por 8!

Definição

Dado um número natural n, segue que:

I. $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1, n > 1$
II. $1! = 1$
III. $0! = 1$

O símbolo n! pode ser lido como **n fatorial.**

Exemplos

1. $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
2. $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$
3. $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5\,040$

4. $8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$

Observe que:

1. $8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1\ 8 \cdot 7!$

2. $7!\ 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7 \cdot 6!$

3. $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \cdot 5!$

Analisando esses resultados, pode-se enunciar a seguinte propriedade:

Propriedade: $n! = n \cdot (n - 1)!$, para n natural e $n > 0$.

Note que, ao desenvolver o fatorial de um número natural, escreve-se como primeiro fator o número indicado no fatorial seguido dos fatores com uma unidade a menos que o anterior até o fator igual a 1. No processo, é possível reorganizar o produto utilizando-se na escrita um fatorial menor, na mesma ideia da propriedade. Acompanhe o exemplo a seguir:

$6! = 6 \cdot 5! = 6 \cdot 5 \cdot 4! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!$

Esse tipo de notação auxilia as simplificações, por exemplo, de divisões que utilizam a notação fatorial.

Exemplo

$$\frac{88!}{85!} = \frac{88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85!}{85!} = 88 \cdot 87 \cdot 86 = 658\,416$$

APRENDER SEMPRE 4

01.

Simplifique:

a. $\dfrac{12!}{10!}$

b. $\dfrac{8!}{5!\,3!}$

c. $\dfrac{100!}{99! + 98!}$

Resolução

a. $\dfrac{12!}{10!} = \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10}{10!} = 132$

b. $\dfrac{8!}{5!\,3!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 6!} = 8 \cdot 7 = 56$

c. $\dfrac{100!}{99! + 98!} = \dfrac{100 \cdot 99 \cdot 98!}{99 \cdot 98! + 98!} =$

$= \dfrac{100 \cdot 99 \cdot 98!}{98!(99 + 1)} = \dfrac{100 \cdot 99}{100} = 99$

02.

Escreva os produtos usando a notação fatorial.

a. $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

b. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$

c. $12 \cdot 11 \cdot 10$

d. $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 8$

Resolução

a. $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$

b. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5!$

c. $15 \cdot 14 \cdot \ldots \cdot 8 = \dfrac{15 \cdot 14 \cdot \ldots \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = \dfrac{15!}{7!}$

03.

Resolva a equação $(2x + 5)! = 24$.

Resolução

Como $4! = 24$, tem-se que $2x + 5 = 4$.

$2x + 5 = 4 \Rightarrow 2x = -1$

$x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow S = \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

F. Permutação simples

George Pólya (1887-1985)

George Pólya foi um matemático húngaro-americano que, em 1937, introduziu uma importante técnica de enumeração.

Suponha uma corrida com apenas dois corredores, A e B.

Considerando que ambos terminarão a corrida, quais serão as possíveis ordens de chegada?

Uma possibilidade é A chegar em primeiro e B, em segundo, o que será indicado por AB.

Outra possibilidade é B chegar em primeiro e A em segundo, isto é, BA.

E se houvesse três corredores, A, B e C?

As possibilidades estão listadas a seguir.

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA.

E se forem quatro corredores, A, B, C e D?

Listando, têm-se:

ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCD, BACD, BADC, BCAD, BCDA, BDAC, BDCA, CABD, CADB, CBAD, CBDA, CDAB, CDBA, DABC, DACB, DBAC, DBCA, DCAB, DCBA.

Em todos esses casos, consideraram-se todas as possíveis ordens dos elementos que estavam envolvidos nas respectivas situações. A organização de determinado grupo de elementos em certa ordem é uma **permutação simples** dos elementos. No primeiro caso, AB é uma permutação dos elementos A e B e BA é outra permutação; no segundo caso, cada elemento da lista apresentada é uma permutação de

EMI-16-110

A, B e C, sendo CBA um exemplo de permutação desses elementos; e, no terceiro caso, a lista apresentou as permutações de A, B, C e D, sendo DCBA um dos exemplos de permutação.

A ordenação de determinados objetos é uma permutação deles. Pode-se associar a palavra permutar ao ato de trocar de posição ou mudar a ordem. Diz-se também que, quando determinados objetos estão ordenados, há aí uma sequência dos objetos. Dessa forma, uma permutação de determinados elementos é também uma sequência deles. É preciso estar atento porque, na permutação, todos os elementos apresentados devem ser usados e nenhum deles pode aparecer a mais ou a menos que o fornecido. Um elemento só pode aparecer repetido se na apresentação original ele estiver repetido.

É possível contar as quantidades de permutações.

Na situação preliminar, caso 1, há somente duas permutações. Não seria necessário apresentá-los para contá-los, pois, usando-se o princípio multiplicativo, a quantidade poderia ser encontrada fazendo-se 2 vezes 1, que é igual a 2, que também é igual a 2!.

No segundo caso, há seis permutações. Pelo princípio multiplicativo, pode-se contá-las da seguinte forma:

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

sendo que 6 é igual a 3!.

O terceiro caso apresenta-se como segue.

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Também aqui é possível escrever na forma fatorial, em que 24 é o mesmo que 4!.

Observando cada situação, percebe-se que a quantidade de permutações é dada pelo fatorial do número que indica a quantidade de elementos. Em geral, pode-se dizer que:

> O número de permutações de n elementos, em que não há repetição de elementos, é igual a n!.

A quantidade de permutações, como exposto no quadro anterior, pode ser representada da seguinte forma:

$$P_n = n!$$

APRENDER SEMPRE 5

01.

Um fiscal do Ministério do Trabalho faz uma visita mensal a cada uma das cinco empresas de construção civil existentes no município. Para evitar que os donos dessas empresas saibam quando o fiscal irá inspecioná-las, ele varia a ordem de suas visitas. De quantas formas diferentes esse fiscal pode organizar o calendário de visita mensal a essas empresas?

a. 180
b. 120
c. 100
d. 48
e. 24

Resolução

O total de modos representa o total de permutações possíveis entre as cinco empresas. Assim, total = $P_5 = 5! = 120$

02.

De quantas maneiras cinco pessoas podem se acomodar em um carro de cinco lugares sendo que qualquer uma dessas pessoas pode ocupar qualquer lugar disponível?

Resolução

Suponha que as pessoas sejam A, B, C, D e E. Para organizá-las pode-se imaginar as permutações delas, uma vez que não há restrições.

Fazendo-se $P_5 = 5!$, chega-se a 120.

Há 120 maneiras.

F.1. Anagramas

Considere a palavra COR.

As permutações das letras dessa palavra formam as sequências: COR, CRO, ROC, RCO, OCR e ORC. Essas sequências são chamadas de **anagramas** da palavra COR. Na ordenação das letras, tanto pode aparecer palavras que possuem sentido linguístico, como sequências de letras que não têm nenhum sentido.

Define-se **anagrama** como sendo uma sequência de letras resultante da reorganização da ordem das letras de uma palavra dada, sendo que a nova ordem de escrita formará uma sequência de letras com ou sem sentido linguístico. Note que a própria palavra dada é um de seus anagramas.

Observe que um anagrama nada mais é do que uma permutação das letras da palavra original. Dessa forma, a quantidade de anagramas é igual à quantidade de permutações das letras da palavra inicial.

Na situação anterior, a quantidade de anagramas da palavra COR é 3!, que é igual a 6.

APRENDER SEMPRE 6

01.

Quantos anagramas têm a palavra FUVEST?

Resolução

A quantidade de anagramas é igual à quantidade de permutações das 6 letras distintas.

$P_6 = 6! = 120$

G. Arranjo simples

Há ordenações em que a quantidade de elementos que formarão a sequência poderá ser menor que a quantidade de elementos fornecidos. Para entender esses agrupamentos, acompanhe o problema a seguir.

Atualmente, no campeonato brasileiro de futebol da série A de nosso país são considerados 20 times. Ao final do campeonato, aparecerá uma ordem de classificação dos times e, dependendo da posição de cada um na tabela, haverá uma qualificação para ele.

Quantas possíveis sequências, com os vinte times que disputam o campeonato em determinado ano, existem? Suponha que para cada posição haverá um único time.

A resposta dessa pergunta é encontrada com a permutação simples dos vintes times. Assim, segue que:

$P_{20} = 20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000$

Há, dessa forma, 2 432 902 008 176 640 000 maneiras de classificação dos vinte times.

Agora, se a pergunta for: de quantas formas é possível ter os três primeiros colocados?

A resposta será dada por meio do princípio multiplicativo, não tendo como usar a permutação dos vinte times. Vem, dessa forma, que:

1º colocado		2º colocado		3º colocado	
20	×	19	×	18	= 6 840

Existem, então, 6 840 maneiras distintas para se agruparem os vinte times com a intenção de formar as três primeiras posições.

Repare que, na primeira situação, a quantidade de elementos da sequência a se formar é igual à quantidade de times que disputam o campeonato. No segundo caso, a quantidade de elementos é 3, enquanto a quantidade de times é 20. A primeira situação é um caso de permutação simples. A segunda não pode ser chamada de permutação simples; sua denominação é **arranjo simples.** Por outro lado, a primeira situação também pode ser chamada de **arranjo simples**.

Define-se um **arranjo simples** de n elementos tomados k a k como sendo uma sequência de k elementos escolhidos entre os n elementos disponíveis. É importante observar que há duas maneiras de dois arranjos simples serem diferentes: uma possibilidade é ambos possuírem os mesmos elementos, mas em ordens distintas, outra é a existência de elemento distinto. Para a consideração das letras A, B, C e D, tem-se que ABC e ACD são dois arranjos simples distintos, em que houve mudança apenas na ordem dos elementos, enquanto ABC e ABD são dois arranjos simples distintos, em que houve mudança de elemento.

Nesse tópico, utilizaremos a contagem de **arranjo simples** apenas com o **princípio fundamental da contagem**.

APRENDER SEMPRE 7

01.

Suponha que 32 seleções disputem um campeonato mundial, sem divisão em chaves. Quantas são as possibilidades matemáticas de classificação dos três primeiros lugares, sendo que para cada posição haverá um único time?

Resolução

Como uma mesma equipe não pode ocupar posições distintas, temos:

1º colocado: 32 possibilidades
2º colocado: 31 possibilidades
3º colocado: 30 possibilidades

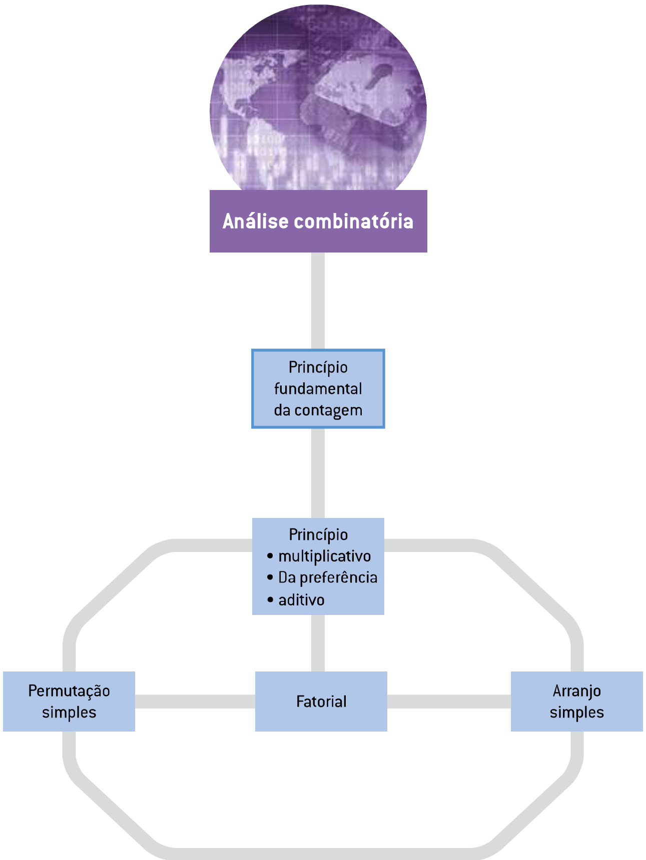
Aplicando o princípio fundamental da contagem, temos que existem $32 \cdot 31 \cdot 30 = 29\,760$ modos de classificação para os 3 primeiros lugares.

Observe que a ordem da escolha dos elementos altera a classificação e a contagem é denominada de **arranjo simples.**

EMI-16-110

2. Organizador gráfico

A. Análise combinatória – Parte I



Tema | Tópico | Subtópico | Subtópico destaque | Apenas texto | Características

Módulo 61

Princípio fundamental da contagem: princípio multiplicativo

Exercícios de **Aplicação**

01. UFG-GO

Uma pessoa dispõe de R$ 800,00 para comprar camisas e calças, de modo a obter exatamente vinte trajes distintos. Cada traje consiste de uma calça e uma camisa, que custam R$ 110,00 e R$ 65,00, respectivamente. Considerando-se que cada peça pode fazer parte de mais de um traje, calcule o número de camisas e de calças que a pessoa comprará sem ultrapassar a quantia em dinheiro de que dispõe.

Resolução

Como o produto das quantidades deve ser 20, temos as seguintes possibilidades:

1 calça e 20 camisas: $110 + 20 \cdot 65 = 1\,410$

2 calças e 10 camisas: $2 \cdot 110 + 10 \cdot 65 = 870$

4 calças e 5 camisas: $4 \cdot 110 + 5 \cdot 65 = 765$

5 calças e 4 camisas: $5 \cdot 110 + 4 \cdot 65 = 810$

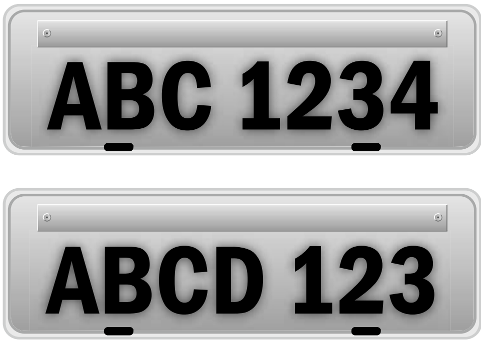
10 calças e 2 camisas: $10 \cdot 110 + 2 \cdot 65 = 1\,230$

20 calças e 1 camisa: $20 \cdot 110 + 1 \cdot 65 = 2\,265$

Como devem-se gastar até 800 reais, a única possibilidade é comprar 4 calças e 5 camisas.

02. Unicamp-SP

Para acomodar a crescente quantidade de veículos, estuda-se mudar as placas, atualmente com três letras e quatro algarismos numéricos, para quatro letras e três algarismos numéricos, como está ilustrado .



Considere o alfabeto com 26 letras e os algarismos de 0 a 9. O aumento obtido com essa modificação em relação ao número máximo de placas em vigor seria:

a. inferior ao dobro.
b. superior ao dobro e inferior ao triplo.
c. superior ao triplo e inferior ao quádruplo.
d. mais que o quádruplo.

Resolução

Placas com três letras e quatro algarismos:

$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26^3 \cdot 10^4$

Placas com quatro letras e três algarismos:

$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26^4 \cdot 10^3$

$$\frac{26^4 \cdot 10^3}{26^3 \cdot 10^4} = 2{,}6$$

$26^4 \cdot 10^3 \; 2{,}6 \cdot 26^3 \cdot 10^4$

$26^4 \cdot 10^3 = (1 + 160\%) \cdot 26^3 \cdot 10^4$

O aumento é de 160% que não chega a ser o dobro.

Alternativa correta: A

03. Enem

O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existam 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido.

Todos os alunos decidiram participar. A cada vez, um aluno é sorteado e dá a sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada.

O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há:

a. 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
b. 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
c. 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
d. 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
e. 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

Resolução

O número de maneiras distintas com que podemos escolher um personagem, um objeto e um cômodo é:

$$\underbrace{6}_{\text{Personagem}} \cdot \underbrace{5}_{\text{Objeto}} \cdot \underbrace{9}_{\text{Cômodo}} = 270 \text{ maneiras}$$

Como existiam 280 alunos, o diretor sabia que alguém acertaria, pois havia 10 alunos a mais que as possíveis respostas.

Alternativa correta: A

Habilidade

Resolver problemas elementares de contagem utilizando o princípio multiplicativo.

Exercícios **Extras**

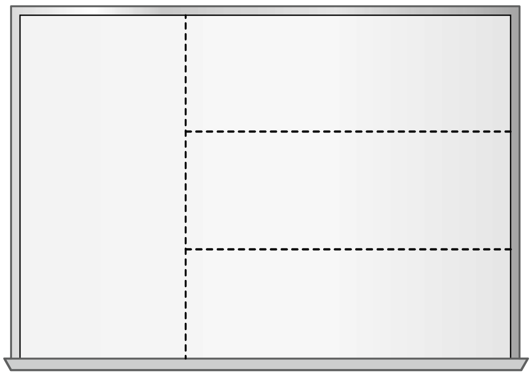
04. FGV-SP

Usando as letras do conjunto {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j}, quantas senhas de 4 letras podem ser formadas de modo que duas letras adjacentes, isto é, vizinhas, sejam necessariamente diferentes?

a. 7 290
b. 5 040
c. 10 000
d. 6 840
e. 11 220

05. UFRN

O quadro de avisos de uma escola de Ensino Médio foi dividido em quatro partes, como mostra a figura.



No retângulo à esquerda, são colocados os avisos da diretoria, e, nos outros três retângulos, serão colocados, respectivamente, de cima para baixo, os avisos dos 1º, 2º, e 3º anos do Ensino Médio.

A escola resolveu que retângulos adjacentes (vizinhos) fossem pintados, no quadro, com cores diferentes. Para isso, disponibilizou cinco cores e solicitou aos servidores e alunos sugestões para a disposição das cores no quadro.

Determine o número máximo de sugestões diferentes que podem ser apresentadas pelos servidores e alunos.

EMI-16-110

Seu espaço

Sobre o módulo

Neste módulo, introduziremos o princípio fundamental da contagem. Só será abordado o princípio multiplicativo. Insistir na ideia de se usar o conectivo "e" quando estiver elaborando a resolução, pelo menos nos primeiros exercícios.

Bom trabalho!

Estante

- TAVARES, Cláudia S.; BRITO, Frederico R. M.de. Contando a história da contagem, *Revista do Professor de Matemática*, v.57. p. 33-40, 2005.

O artigo apresenta uma descrição do desenvolvimento da análise combinatória, do *Stomachion* aos modernos problemas da teoria dos grafos.

- CARNEIRO, Vera C. Colorindo mapas, *Revista do Professor de Matemática*, v.29. p. 31-35, 1995.

O artigo faz uma visita aos grafos, a partir da coloração de mapas.

- PITOMBEIRA, João B. Princípio da casa dos pombos, *Revista do Professor de Matemática*, v.8. p. 21-26, 1986.

Nesse artigo há um comentário sobre um dos princípios básicos da combinatória, o chamado "princípio da casa dos pombos" ou "princípio das gavetas de Dirichlet".

Exercícios **Propostos**

Da teoria, leia os tópicos 1 A e B.

Exercícios de tarefa reforço aprofundamento

06.

Num estádio, há 10 portas. Quantas possibilidades existem de uma pessoa entrar por uma porta e sair por outra?

07.

Quantos são os divisores naturais do número inteiro $N = 3^4 \cdot 7^2$?

08.

Temos disponíveis apenas os algarismos 1, 2, 3, 5, 7 e 8.

a. Quantos numerais de três dígitos podemos formar?
b. E se não pudermos repetir algarismos?
c. E se tivéssemos pelo menos dois algarismos repetidos?

09. FGV-SP

Uma sala tem 10 portas. De quantas maneiras diferentes essa sala pode ser aberta?

a. $\frac{10!}{5!}$
b. 500
c. 10
d. 10!
e. $2^{10} - 1$

10. UEMG

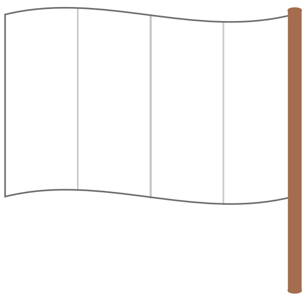
Uma secretária possui 6 camisas, 4 saias e 3 pares de sapatos. O número de maneiras distintas com que a secretária poderá se arrumar usando 1 camisa, 1 saia e 1 par de sapatos corresponde a:

a. 13
b. 126
c. 72
d. 54

EMI-16-110

11.

A figura representa uma bandeira com 4 listras. Dispondo-se de quatro cores distintas, deseja-se pintar todas as listras, de forma que listras vizinhas tenham cores diferentes.



De quantas maneiras distintas a bandeira pode ser pintada? Justifique.

12. FGV-SP

Um restaurante oferece no cardápio 2 saladas distintas, 4 tipos de carne, 5 variedades de bebidas e 3 sobremesas diferentes. Uma pessoa deseja uma salada, um prato de carne, uma bebida e uma sobremesa. De quantas maneiras a pessoa poderá fazer seu pedido?

a. 120
b. 144
c. 14
d. 60
e. 12

13. UEL-PR (adaptado)

Os clientes de um banco, ao utilizarem seus cartões nos caixas eletrônicos, digitavam uma senha numérica composta por cinco algarismos. Com o intuito de melhorar a segurança da utilização desses cartões, o banco solicitou a seus clientes que cadastrassem senhas numéricas com seis algarismos.

Se a segurança for definida pela quantidade de possíveis senhas, em quanto ela aumentou percentualmente na utilização dos cartões?

a. 10%
b. 90%
c. 100%
d. 900%
e. 1 900%

14. UECE

Se X e Y são conjuntos que possuem 6 e 12 elementos respectivamente, então o número de funções injetivas $f: X \rightarrow Y$ que podem ser construídas é:

a. 665 280
b. 685 820
c. 656 820
d. 658 280

15. UFRN

De acordo com o Conselho Nacional de Trânsito – Contran –, os veículos licenciados no Brasil são identificados externamente por meio de placas cujos caracteres são três letras do alfabeto e quatro algarismos.

Nas placas a seguir, as letras estão em sequência e os algarismos também.

O número de placas que podemos formar com as letras e os algarismos distribuídos em sequência, como nos exemplos, é:

a. 192
b. 168
c. 184
d. 208

16. OBMEP

Cada uma das placas das bicicletas de Quixajuba contém três letras. A primeira letra é escolhida dentre os elementos do conjunto A = {G, H, L, P, R}, a segunda letra é escolhida dentre os elementos do conjunto B = {M, I, O} e a terceira letra é escolhida dentre os elementos do conjunto C = {D, U, N, T}.

Devido ao aumento no número de bicicletas da cidade, teve-se que expandir a quantidade de possibilidades de placas. Ficou determinado acrescentar duas novas letras a apenas um dos conjuntos ou uma letra nova a dois conjuntos. Qual o maior número de novas placas que podem ser feitas, quando se acrescentam as duas novas letras?

Módulo 62

Princípio da preferência

Exercícios de **Aplicação**

01. UFRJ

Quantos números naturais de três algarismos distintos existem no nosso sistema de numeração?

Resolução

Há uma restrição "forte" na casa das centenas, pois esta não pode ser ocupada pelo zero, assim a contagem deve iniciar-se por essa casa, sendo que também não pode haver algarismos repetidos.

Volta o zero em uma das casas

Diferente de zero	Diferente da centena Diferente da unidade	Diferente da centena Diferente da dezena

$9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$

Há 648 **números naturais de 3 algarismos** distintos no nosso sistema de numeração.

02.

Quantos números naturais pares de três algarismos distintos podem se formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 7 e 8 ?

Resolução

Há uma restrição "forte" na casa das unidades, pois, para o número ser par, é preciso que a casa das unidades termine em algarismos pares.

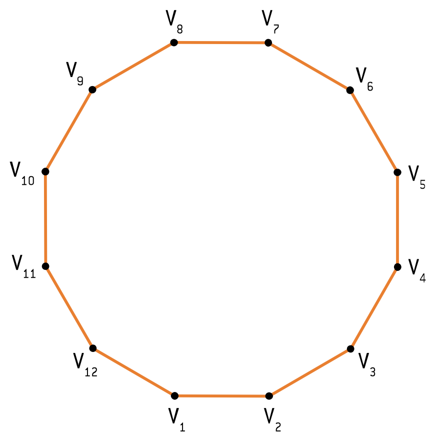
Centena	e dezena	e unidade
6	5	3

$6 \cdot 5 \cdot 3 = 180$

Há 180 números naturais pares de três algarismos distintos.

03. UFES

Um grupo de 12 pesquisadores, dentre eles dois brasileiros, José e Eduardo, deverá monitorar os vértices do acelerador de partículas do LNLS. Se cada um dos vértices $V_1, V_2, ..., V_{12}$ do acelerador (veja figura a seguir) deve ser monitorado por exatamente um pesquisador do grupo, o número de possíveis maneiras de alocar esses pesquisadores nos vértices do acelerador, de modo que José e Eduardo não sejam alocados em vértices adjacentes, é:



$V_1, V_2, ..., V_{12}$ são os vértices do acelerador.

a. $108 \times 10!$
b. $119 \times 10!$
c. $120 \times 10!$
d. $12! - 120$
e. $12! - 66$

Resolução

$\underset{\text{José}}{\underline{12}} \cdot \underset{\text{Eduardo}}{\underline{9}} \cdot \underline{10} \cdot \underline{9} \cdot \underline{8} \cdot \underline{7} \cdot \underline{6} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 108 \cdot 10!$

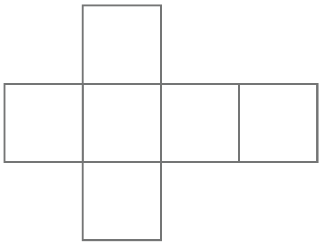
Alternativa correta: A

Habilidade

Aplicar os raciocínios combinatórios aditivo e/ou multiplicativo na resolução de situações-problema.

04. UFPR

A figura apresenta uma planificação do cubo que deverá ser pintada de acordo com as regras a seguir.

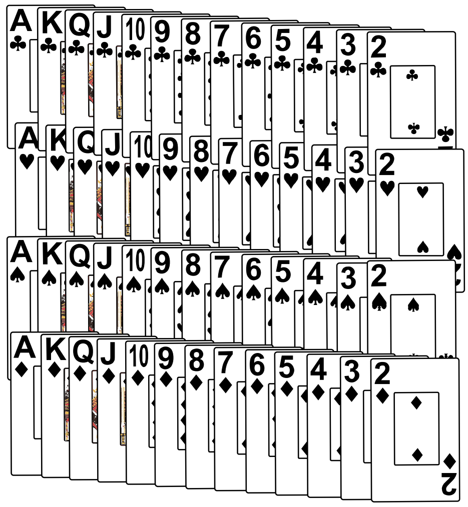


Os quadrados que possuem um lado em comum, nessa planificação, deverão ser pintados com cores diferentes. Além disso, ao se montar o cubo, as faces opostas deverão ter cores diferentes. De acordo com essas regras, qual o menor número de cores necessárias para se pintar o cubo, a partir da planificação apresentada?

- **a.** 2
- **b.** 3
- **c.** 4
- **d.** 5
- **e.** 6

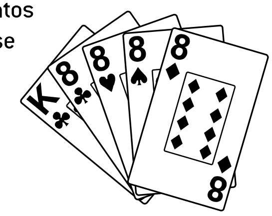
05. UERJ

Na ilustração, as 52 cartas de um baralho estão agrupadas em linhas com 13 cartas de mesmo naipe e colunas com 4 cartas de mesmo valor.



SAULO MICHELIN / PEARSON BRASI

Denomina-se quadra a reunião de quatro cartas de mesmo valor. Observe, em um conjunto de cinco cartas, um exemplo de quadra:



O número total de conjuntos distintos de cinco cartas desse baralho que contêm uma quadra é igual a:

- **a.** 624
- **b.** 676
- **c.** 715
- **d.** 720

Seu espaço

Sobre o módulo

Este módulo abordará algumas aplicações do princípio fundamental da contagem, ressaltando a ideia da preferência na contagem quando esta apresentar restrição "forte".

Bom trabalho!

Exercícios **Propostos**

Da teoria, leia o tópico 1 C.

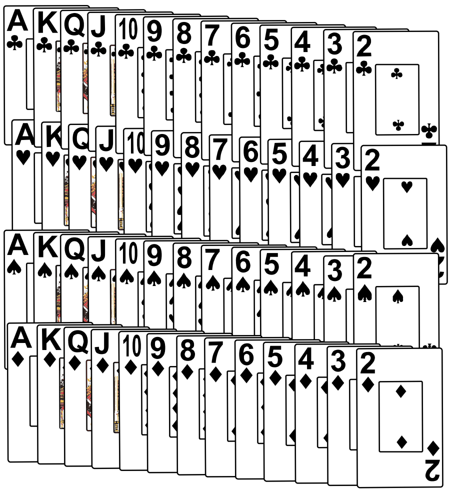
Exercícios de tarefa reforço aprofundamento

06.

Usando os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5, quantos números de quatro algarismos distintos podemos representar?

07.

Um baralho comum é constituído de 52 cartas, sendo composto de 4 naipes, ouros, copas, paus e espadas. Cada naipe possui treze cartas, que são A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q e K. Os naipes ouros e copas são de cor vermelha e os naipes paus e espadas, de cor preta. Observe a figura.


SAULO MICHELIN / PEARSON BRASIL

De quantas maneiras distintas podem ser escolhidas duas cartas em sequência e sem reposição, sendo que a primeira carta deve ser de cor vermelha?

08. UECE

Paulo possui 709 livros e identificou cada um destes livros com um código formado por três letras do nosso alfabeto, seguindo a “ordem alfabética” assim definida: AAA, AAB,..., AAZ, ABA, ABB,..., ABZ, ACA,... Então, o primeiro livro foi identificado com AAA, o segundo com AAB,... Nestas condições, considerando o alfabeto com 26 letras, o código associado ao último livro foi:

a. BAG
b. BAU
c. BBC
d. BBG

09.

Qual a quantidade de números naturais de três algarismos que existe no nosso sistema de numeração?

a. 800
b. 850
c. 900
d. 950
e. 1 000

10.

Usando os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5, quantos números ímpares de quatro algarismos distintos podemos representar?

11.

Quantos números naturais de cinco algarismos existem no nosso sistema de numeração?

12.

Um grupo de pessoas é formado por 5 crianças e 4 adultos, dos quais 3 possuem habilitação para dirigir automóvel. De quantos modos distintos se pode efetuar a lotação de um carro de 5 lugares (2 na frente e 3 atrás) para uma viagem, sabendo-se que criança não pode viajar no banco da frente?

a. 540
b. 630
c. 720
d. 1 260
e. 1 890

13.

Quantos números naturais de quatro algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 7 e 8 e que são divisíveis por 5?

a. 30
b. 60
c. 80
d. 100
e. 120

14. UEM-PR

Para arrecadar fundos, uma associação beneficente realizará um sorteio de diversos prêmios. Para esse sorteio, foram vendidas cartelas numeradas com números de 4 dígitos e cada dígito variando de 1 a 6. A escolha da cartela vencedora se dará pela retirada de bolas numeradas de 1 a 6, e cada bola será retirada de uma urna distinta. Além do prêmio principal a ser dado para a cartela sorteada, prêmios também serão dados pela soma S e pelo produto P dos dígitos do número de cada cartela.

Supondo que todas as cartelas foram vendidas, assinale o que for correto.

01. Foram vendidas 1 300 cartelas.
02. Existem 650 cartelas com números pares.
04. Existem 650 cartelas com S ímpar.
08. Existem 1 215 cartelas com P par.
16. Se para uma determinada cartela P é ímpar, então S é par.

Dê a soma dos números dos itens corretos.

15. FGV-SP

Sete pessoas, entre elas Bento e Paulo, estão reunidas para escolher, entre si, a diretoria de um clube, formada por um presidente, um vice-presidente, um secretário e um tesoureiro. Determine o número de maneiras de compor a diretoria, em que Paulo seja vice-presidente e Bento não seja presidente nem tesoureiro.

16. Fuvest-SP

a. Quantos são os números inteiros positivos de quatro algarismos, escolhidos sem repetição, entre 1, 3, 5, 6, 8 e 9?
b. Dentre os números inteiros positivos de quatro algarismos citados no item a, quantos são divisíveis por 5?
c. Dentre os números inteiros positivos de quatro algarismos citados no item a, quantos são divisíveis por 4?

EMI-16-110